Aalener Beiträge zu komplexen Systemen

D. W. Joenssen und M. Mahinzaeim
Herausgeber

J. O. Reppin und D. W. Joenssen

Optimal Stopping: Erwartungsminimierung beim Full-Information-Game

Ausgabe 2022-01; Januar 2022

Aalen University
Beethovenstraße 1
73430 Aalen
Germany

Autoren: J. O. Reppin und D. W. Joenssen
Titel: Optimal Stopping: Erwartungsminimierung beim Full-Information-Game

Aalener Beiträge zu komplexen Systemen

ISSN 2700-2721

urn:nbn:de:bsz:944-opus4-13191

Anschrift: Hochschule Aalen – Technik und Wirtschaft
Beethovenstraße 1
73430 Aalen
Deutschland

Zusammenfassung: Das Sekretärinnenproblem oder Dowry-Problem ist ein prominenter Vertreter der Optimal-Stopping Probleme. Hierzu existieren Algorithmen, die unter voller Information für eine bekannte Verteilung der betrachteten Zufallszahlen, ertragsmaximale Lösungen versprechen. Dieser Aufsatz beschäftigt sich mit der Anpassung der Verfahren auf Minimierungsprobleme. Nach der Herleitung der Lösung, wird diese exemplarisch auf vier Verteilungen Übertragen. Danach werden die resultierenden Algorithmen numerisch und analytisch betrachtet, um Rückschlüsse über wesentliche Eigenschaften ziehen zu können.

Schlüsselwörter: Sekritärinenproblem, full information, Optimierung, Minimierung

Abstract: The secretary or dowry problem is a well known optimal stopping problem. Existing solutions are based on full information and require a maximization. This paper considers adapting existing algorithms to a minimization problem. After this adaptation, the solution is shown explicitly for four well know distributions. Following, properties of these algorithms are elicited by numeric and analytic methods.

Keywords: optimal stopping, full information game, optimization, secretary problem

1 Einleitung

Der Bereich des Optimal-Stopping ist ein Teilgebiet der Spieltheorie und beschäftigt sich damit, effiziente Lösungsstrategien beim sequentiellen Suchen zu entwickeln. Hierbei sollen unter Berücksichtigung der Suchkosten eine Gewinnchance oder Ausbeute maximiert werden. Das *Sekretärinnenproblem*, oder auch *Dowry-Problem*, gehört als wohl prominentester Vertreter dieser Problemklasse an. Unter diesen Namen wurden mehrere Probleme mit sequenzieller Abgleich unter unterschiedlichen Grundannahmen untersucht (siehe Assaf et al., 2004; Petruccelli, 1980). Historisch gesehen, wurde das Problem in den 1960er Jahren zuerst von Fox und Marnie (1960) in Martin Gardners „Mathematical Games" beschrieben.

Das Sekretärinnenproblem beschreibt die Herausforderung einer Person, die eine Sekretärin einstellen möchte. Diese Person will natürlich die beste Wahl aus einem Pool an Kandidatinnen treffen. Dabei wird jede Kandidatin einzeln interviewt. In der Grundform des Problems kann von einer perfekten Einschätzung der Fähigkeiten des Bewerbers ausgegangen werden. Nach jedem Interview muss entschieden werden, ob die Kandidatin akzeptiert wird oder nicht. Diese Entscheidung ist nicht reversibel, eine Ablehnung ist final. Dies wiederum impliziert, das wenn keine Bewerberin akzeptiert wird, muss die letzte akzeptiert werden. Hieraus ergibt sich die Frage, ob eine Strategie existiert, mit der möglichst effizient die Interviews angegangen werden kann. Unter der Prämisse, dass nur die Anzahl der Bewerberinnen bekannt ist und nichts über die Verteilung derer Fähigkeiten, hat Bruss (1984) die sogenannte "$\frac{1}{e}$-law of best choice" entwickelt. Dabei werden die ersten $\frac{n}{e}$-Bewerberinnen interviewt und der Rang untereinander katalogisiert und abgelehnt. Danach wird das Spiel solange fortgeführt bis eine Bewerberin gefunden wurde, die im Rang besser als die ersten $\frac{n}{e}$-Bewerber ist. Diese Bewerberin wird akzeptiert und das Spiel ist beendet.

Das Dowry Problem ist ähnlich zu dem Sekretärinnenproblem. Auf Papierstücken wird die Menge an Mitgift bei einer Heirat geschrieben. Der Junggeselle zieht eine der Papierstücke und soll, wie beim Sekretärinnenproblem, die Menge an Mitgift akzeptieren oder ablehnen. Ziel ist es, die maximale Mitgift zu erhalten, denn nur dann gilt das Spiel als gewonnen und der Junggeselle darf die Mitgift behalten. Mathematisch gesehen sind diese beiden Probleme sehr ähnlich, da einerseits nichts über die Verteilung der Bewerberinnen oder der Papierstücke mit dem Mitgift bekannt ist und andererseits sind die Abläufe der beiden Probleme gleich. Das Dowry-Problem wurde von Gilbert und Mosteller (1966) in verschiedenen Varianten betrachtet. Die Autoren gehen dabei auf die Unbekanntheit der Mitgift-Verteilung ein und geben auch für die volle Bekanntheit der Verteilung (Full-Information Game) eine Lösung an.

Gilbert und Mosteller (1966, Seite 65 ff.) betrachten die Maximierungstrategien für das "Full-Information Game" bei unterschiedliche Verteilungen (Gleich, Inverse Powers, Exponential, Normal) der Ausbeute. Bis dato wurden diese Strategien nie auf Minimierungsprobleme übertragen, obwohl diese interessante Anwendungsmöglichkeiten bieten. Daher wird sich in folgenden Abschnitten dieser Problematik gewidmet. Zunächst wird in Unterabschnitt 2.1 allgemein die rekursive Entscheidungsvorschrift für eine Minimierung beim "Full-Information Game" hergeleitet. Nach dieser Herleitung wird in Unterabschnitt 2.2 die Vorschrift auf ausgewählte Verteilungen angewendet. Es werden für die Normalverteilung, Exponentialverteilung, stetige Gleichverteilung und Chi-Verteilung die Folgen der rekursiven Entscheidungszahlen R_n angegeben. Danach wird in Unterabschnitt 2.4 die Konvergenz dieser Entscheidungszahlen jener Folgen für ein Spiel einer unendlichen

Länge betrachtet. Zuletzt werden in einem Fazit die Ergebnisse kritisch gewürdigt und ein Ausblick auf weitere Arbeiten gegeben.

2 Minimierung beim Full-Information Game

2.1 Herleitung der rekursiven Vorschrift

Die Methoden des Optimal-Stopping aus dem Bereich der Spieltheorie geben Strategien an, mit denen unter bestimmten Prämissen möglichst effizient ein Problem gelöst werden kann. Gilbert und Mosteller (1966, Seiten 65 ff.) konkretisieren die Annahmen, unter denen Sie eine optimale Strategie zur Lösung des "Full-Information Game" entwickeln, auf folgende Punkte:

- Die Anzahl n der Ziehungen ist endlich und bekannt.
- Die Verteilungsfunktion der Ziehung ist vollständig bekannt.
- Jede Ziehung wird einzeln nacheinander in einer zufälligen Reihenfolge durchgeführt.
- Nach jeder Ziehung muss entschieden werden, ob die Ziehung akzeptiert wird oder nicht.
- Das Entscheidungskriterium jeder Ziehung ist ihr jeweiliger Wert.
- Wird bis zum Ende keine Ziehung akzeptiert muss die letzte akzeptiert werden.

Hierzu leiten sie basierend auf dem Gedanken der Erwartungswertmaximierung folgende Strategie her:

- Jeder gezogene Wert wird mit einer Entscheidungszahl R_{n+1} verglichen.
- Übersteigt der gezogene Wert R_{n+1} wird der Wert akzeptiert und das Spiel ist beendet.
- Ist der gezogene Wert kleiner als R_{n+1} wird der Wert abgelehnt und die nächste Iteration erfolgt.

Die rekursive Vorschrift zur Berechnung der jeweils relevanten Entscheidungszahl lautet hierbei (vgl. Gilbert und Mosteller, 1966):

$$R_{n+1} = \int_{R_n}^{\infty} xf(x)dx + R_n \int_{-\infty}^{R_n} f(x)dx \tag{1}$$

Das erste Integral der Gleichung entspricht dem Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ im Intervall $[R_n, \infty]$ unter der Bedingung, dass die Ausprägung der Zufallsvariable größer als die Entscheidungszahl ist. Das zweite Integral entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert aus dem Intervall $[-\infty, R_n]$ gezogen wird unter der Bedingung, dass die Ausprägung der Zufallsvariable kleiner als die Entscheidungszahl ist.

Im Falle eines Minimierungsproblems muss diese Gleichung umgeformt werden. Bei der ersten Ziehung wird der Erwartungswert wie folgt berechnet:

$$R_1 = E[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{2}$$

Die Ziehung wird akzeptiert, falls $X_1 \leq E[X_1]$ ist, also jene Ausprägung der Zufallsvariable kleiner oder gleich der Entscheidungszahl ist. Ist dies nicht der Fall, wird die Ziehung abgelehnt und eine weitere Ziehung wird vorgenommen. Dabei muss diese zweite Ziehung folgender Gleichung genügen:

$$X_2(x_2) = min\{x_2, E[X_2]\} \tag{3}$$

Die Ziehung wird akzeptiert, falls $X_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Die zweite Entscheidungszahl R_2 entspricht daher:

$$R_2 = \int_{-\infty}^{R_1} xf(x)dx + R_1 \int_{R_1}^{\infty} f(x)dx \tag{4}$$

Hierdurch wird klar, dass allgemein für die n+1-Ziehung folgende rekursiv zu berechnende Gleichung für die Entscheidungszahl gilt:

$$R_{n+1} = \int_{-\infty}^{R_n} xf(x)dx + R_n \int_{R_n}^{\infty} f(x)dx \tag{5}$$

Das erste Integral entspricht dem Erwartungswert $E[X|X_n \leq R_n]$ und das zweite Integral der Wahrscheinlichkeit einen Wert im Intervall $[R_n, \infty]$ zu ziehen. Die Integralgrenzen entsprechen dem Definitionsbereich der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichte und sind formell gegeben mit $-\infty$ und ∞, sofern die Wahrscheinlichkeitsdichte über die reellen Zahlen existiert.

2.2 Lösung zu unterschiedlichen Verteilungen

Gleichung 5 definiert den allgemeinen Fall zur Berechnung der Entscheidungszahl. Zur Anwendung dieser in einem "Full-Information Game"mit dem Ziel der Minimierung, muss diese Gleichung jedoch für die konkret angenommene Verteilung bestimmt werden. Im folgenden sind die Rekursionsvorschriften für ausgewählte Verteilungen dargestellt. Dabei seien f(x) die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, F(x) die dazugehörige Verteilungsfunktion und R_1 die jeweilige erste Entscheidungszahl:

Stetige Gleichverteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases} \tag{7}$$

$$R_{n+1} = \frac{R_n^2 - 2R_n b + a^2}{2(a-b)}, \quad mit \quad R_1 = \frac{a+b}{2} \tag{8}$$

Exponentialverteilung:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty), \quad \lambda > 0 \tag{9}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{10}$$

$$R_{n+1} = \frac{1 - e^{-\lambda R_n}}{\lambda}, \;\; mit \;\; R_1 = \frac{1}{\lambda} \tag{11}$$

Standard Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \;\; mit \;\; \mu = 0, \;\; \sigma = 1, \;\; x \in \mathbb{R} \tag{12}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf(\frac{x}{\sqrt{2}})\right], \;\; erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{13}$$

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= -f(R_n) + R_n \frac{1}{2} erfc(\frac{R_n}{\sqrt{2}}), \;\; erfc(x) = 1 - erf(x) \\ &= R_n F(-R_n) - f(R_n), \;\; mit \;\; R_1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Chi-Verteilung:

$$f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x^2/2}}{2^{(k/2)-1} \Gamma(k/2)}, \;\; k > 0, \;\; x \in [0, \infty) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= P(k/2, x^2/2), \;\; mit \;\; P(s,x) = \frac{\gamma(s,x)}{\Gamma(s)} \\ \gamma(s,x) &= \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt, \;\; \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (erf(\frac{R_n}{\sqrt{2}}) + 1), \;\; erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ mit \;\; R_1 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k = 2 \end{aligned} \tag{17}$$

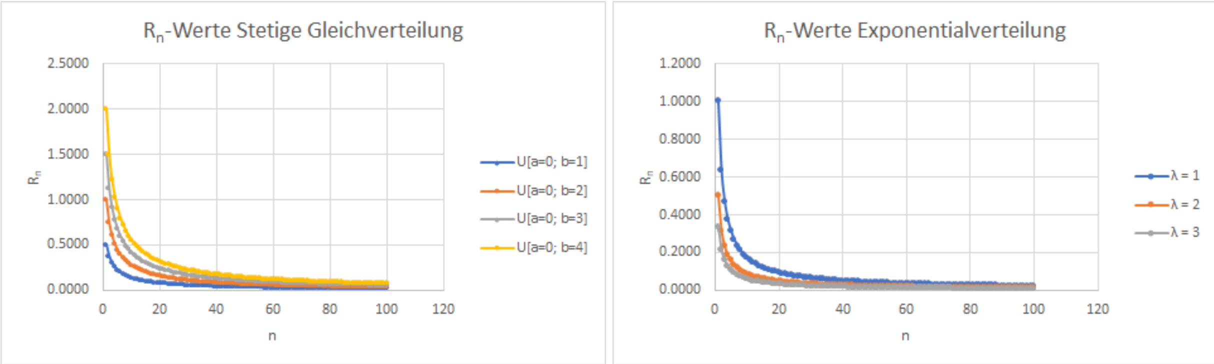
2.3 Numerisches Verhalten der Entscheidungszahlen in ausgewählten Fällen

Um ein besseres Verständnis über die Lösungsstrategie unter unterschiedlichen Annahmen zu erlangen, ist es sinnvoll den Verlauf der Entscheidungszahlen für relevante Parameterkombinationen zu betrachten. Hierzu wurden Entscheidungszahlen im Verlauf über 100 Entscheidungen für jene im Unterabschnitt 2.2 genannten Verteilungen mit ausgewählter Parametrisierung berechnet. Bei der Gleichverteilung wurde die obere Grenze b auf die Werte $1, 2, 3, 4$ festgelegt und die untere Grenze a auf 0 gesetzt. Für die Exponentialverteilung wurde $\lambda = 1, 2, 3$ betrachtet. Bei der Normalverteilung wurde die standard Normalverteilung betrachtet und die Varianz verdoppelt und verdreifacht. Bei der χ-Verteilung wurden die Freiheitsgrade 2, 10 und 16 betrachtet.

Die in allen vier Abbildungen 1a-2b gezeigten Verläufe sind abklingend. Dies war zu erwarten, denn die rekursiven Folgen sind bei der Minimierung streng monoton fallend.

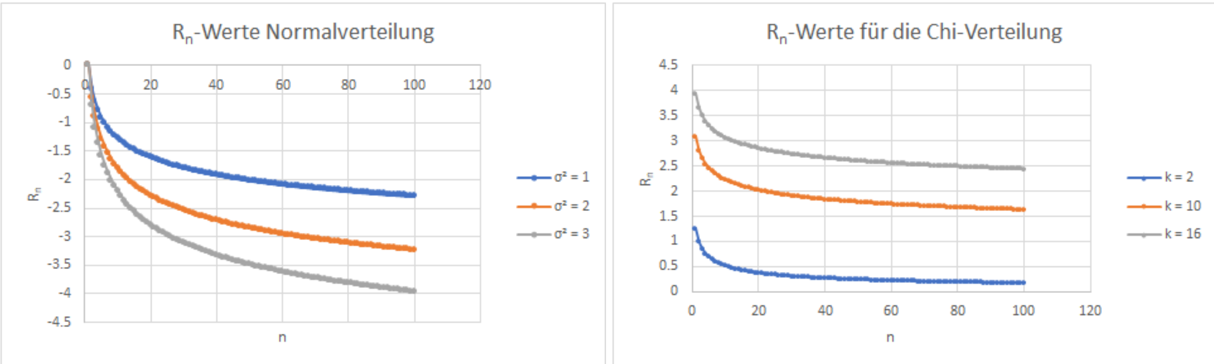
Bei der Gleichverteilung ist zu erkennen, dass alle Werte zwischen den verschiedenen Kurven sich um einen konstanten Faktor unterscheiden. Dies lässt sich auch in Gleichung (8) erkennen. Relevant sind lediglich die Grenzen der Gleichverteilung. Das Minimum erzeugt eine Verschiebung und die Spannweite erzeugt eine Spreizung der R_n.

Bei der Exponentialverteilung lässt sich ein ähnliches Verhalten, wie bei der Gleichverteilung vermuten. Tatsächlich unterscheiden sich die einzelnen Kurven um den konstanten Faktor $1/\lambda$, welches sich wiederum durch Analyse von Gleichung (11) bestätigen lässt. Die Kurven konvergieren gegen Null.



(a) verschiedene a,b-Kombinationen (b) $\lambda = 1,\ 2,\ 3$

Abbildung 1: Entscheidungszahlverläufe für die Stetige Gleichverteilung und die Exponentialverteilung



(a) $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1,\ 2,\ 3$ (b) k=2, 10, 16

Abbildung 2: Entscheidungszahlverläufe für die Normalverteilung und die Chi-Verteilung

Anders als alle verbleibende Diagramme, beginnen die Kurven für die Normalverteilung alle an dem selben Punkt. Dies erklärt sich dadurch, dass der R_1 stets dem Erwartungswert entspricht, der in diesem Fall konstant gehalten wurde. Auch bei der Normalverteilung unterscheiden sich die Kurven um einen festen Faktor. Alle R_n unterscheiden sich um genau die Standardabweichung von der Standardnormalverteilung (in diesem Fall $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$). Die Kurven klingen zwar ab, konvergieren aber nicht.

Zuletzt sei die χ-Verteilung betrachtet. Obwohl sich auch hier der charakteristische abklingende Verlauf zeigt, sind zwischen den einzelnen Kurven keine simplen Gesetzmäßigkeiten zu erkennen. Die Abstände zwischen den Kurven verlaufen nicht linear. Zu beobachten ist vermutlich die Wirkung des zentralen Grenzwertsatzes und die R_ns nähern sich mit steigendem k dem Äquivalent der entsprechend parametrisierten Normalverteilung an.

2.4 Konvergenz

Um ein besseres Verständnis über Spiele unterschiedlicher Länge zu gewinnen, macht es Sinn an dieser Stelle eine Konvergenzbetrachtung der rekursiven Folgen vorzunehmen. Konvergenzkriterien, die überprüft werden, sind die Beschränktheit der Folge, Existenz eines Grenzwertes und monotones steigen oder fallen der Werte.

Betrachtet man die vorherigen Diagramme, ist es evident, dass die Entscheidungszahl in jeder Rekursion für jede der Verteilungen monoton fällt. Dieses ergibt sich zudem aus der Berechnungsvorschrift (5), die lediglich bei Unterschreitung der vorherigen Schranke berechnet wird.

Die obere Grenze der Beschränktheit wird durch den Wert der ersten Entscheidungszahl R_1 gegeben. Die untere Grenze durch den Grenzwert für $n \to \infty$. Unter Nutzung von folgendem Zusammenhang, lassen sich für die betrachteten Verteilungen Grenzwerte bestimmen:

Sei R der Grenzwert der Gleichung so gilt allgemein:

$$R = \lim_{n\to\infty} R_{n+1} = \lim_{n\to\infty} R_n \tag{18}$$

Stetige Gleichverteilung:
Nach Gleichung (18) erhält man durch Einsetzen der rekursiven Folge aus Gleichung (8), die Fixpunktgleichung:

$$\begin{aligned} R &= \frac{R^2 - 2Rb + a^2}{2(a-b)} \\ &\Rightarrow R = a \end{aligned} \tag{19}$$

Somit ergibt sich für die stetige Gleichverteilung folgende Beschränkung:

$$a < R_n \leq \frac{a+b}{2} \tag{20}$$

Exponentialverteilung:
Aus Gleichung (11) erhält man folgende Fixpunktgleichung:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1 - e^{-\lambda R}}{\lambda} \\ &\Leftrightarrow \lambda R + e^{-\lambda R} = 1 \\ &\Rightarrow R = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Somit ergibt sich für die Exponentialverteilung folgende Beschränkung:

$$0 < R_n \leq \frac{1}{\lambda} \tag{22}$$

Normalverteilung:
Für die Normalverteilung wird eine Divergenz vermutet. Um dies zu zeigen wird Konvergenz impliziert um einen Widerspruch zu erzeugen. Unter dieser Annahme kann folgende Fixpunktgleichung erstellt werden:

$$\begin{aligned} & R = RF(-R) - f(R) \\ & \Leftrightarrow R = RF(-R) - f(R)|\frac{d}{dR} \\ & \Leftrightarrow 1 = 0.398942e^{-0.5R^2}R - 0.398942e^{-\frac{R^2}{2}}R + 0.5(1 - erf(\frac{R}{\sqrt{2}})) \\ & \Rightarrow R = -8.50282 \pm 0.364568i \end{aligned} \tag{23}$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen im komplexen Bereich. Da nur ein Grenzwert existiert und die Folgenglieder der Normalverteilung nicht im komplexen Zahlenbereich liegen, liegt hier ein Widerspruch vor. Entsprechend gilt für diese Folge Divergenz.

Chi-Verteilung:
Aus Gleichung (17) erhält man folgende Fixpunktgleichung:

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(erf(\frac{R}{\sqrt{2}})+1) \\
R &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(erf(\frac{R}{\sqrt{2}})+1)|\frac{d}{dR} \\
&\Leftrightarrow 1 = e^{-\frac{R^2}{2}} \\
&\Rightarrow R = 0
\end{aligned} \tag{24}$$

Somit ergibt sich ein Grenzwert für die Chi-Verteilung, mit dem Parameter k = 2, gleich null.

Durch den Grenzwert der jeweiligen Verteilungen kann eine Aussage über die Länge des Spiels gemacht werden. So gibt es für ein Spiel der Länge $n \to \infty$ eine Wahrscheinlichkeit $p > 0$ das Spiel zu beenden, falls Der Grenzwert im Definitionsbereich der Verteilung ist.

Für die stetige Gleichverteilung und die Exponentialverteilung liegt der jeweilige Grenzwert im Definitionsintervall, womit es in beiden Fällen bei einem Spiel der Länge $n \to \infty$ zu einem frühen Stopp $i < \infty$ mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 0$ kommen muss. Der Grenzwert für die Chi-Verteilung liegt für $k = 2$ bei Null, was auch im Definitionsintervall der Dichtefunktion liegt. Bei der Normalverteilung scheint kein Grenzwert zu existieren, somit können Spiele unendlicher Länge existieren, die zu keinem Stopp kommen.

3 Fazit

Dieses Paper beschäftigt sich mit der Herleitung von rekursiven Folgen, die zur Berechnung des Abbruchkriteriums in jedem Schritt eines Full-Information Games unter Minimierung verwendet werden können. Zunächst wurden die Berechnungsvorschriften unter der Bedingung Erwartungswertminimierung hergeleitet, welche bis dato nicht in der Literatur zu finden sind. Diese Berechnungsvorschriften wurden sodann exemplarisch für vier Verteilungen angewendet. Hiermit kann zum einen das Prinzip dargestellt werden. Zum anderen kann das numerische Verhalten von gleichen Spielen zur Erwartungswertminimierung für unterschiedliche Verteilungen betrachtet werden. Neben dem numerischen Verhalten wurde zudem eine Grenzwertbetrachtung vorgenommen, um festzustellen ob diese Spiele endlich sein können.

Weitere Untersuchungen ergeben sich aus den Limitationen dieser Studie. Zunächst wurden lediglich vier Verteilungen und deren Eigenschaften betrachtet. Eine Vielzahl von weiteren Verteilungen könnten betrachtet werden. Hierzu gehören die Chi-Quadrat-Verteilung, die Beta-Verteilung oder die Binomialverteilung.

Natürlich wäre auch die Betrachtung des Minimierungsproblem unter Abänderung der Grundvoraussetzungen interessant. Am naheliegendsten ist die Betrachtung des Partial-Information Games. Dabei sind die Verteilungsfunktionen zwar bekannt, jedoch ihre spezifischen Parameter unbekannt. Dies wäre zudem eine Erweiterung der Arbeiten von Engen und Seim (1987), die das Dowry-Problem unter der Prämisse des Partial-Information Game für die Maximierung betrachtet haben.

Zudem ergeben sich interessante Anwendungsbeispiele, die unter Nutzung der neuen Methode betrachtet werden können. Außerdem könnten die hier erarbeiteten Ergebnisse durch Simulationen oder Tests auf ihre Anwendbarkeit untersucht werden.

Literaturverzeichnis

Assaf, D., Goldstein, L. und Samuel-Cahn, E. (2004). "Two-Choice Optimal Stopping". In: *Advances in Applied Probability* 36.4, S. 1116–1147.

Bruss, F. T. (1984). "A Unified Approach to a Class of Best Choice Problems with an Unknown Number of Options". In: *The Annals of Probability* 12.3, S. 882–889.

Engen, S. und Seim, E. (1987). "Uniformly Best Invariant Stopping Rules". In: *Journal of Applied Probability* 24.1, S. 77–87.

Fox, J. H. und Marnie, L. G. (1960). "Mathematical Games: Martin Gardner's Column". In: *Scientific American* 202.150 and 153.

Gilbert, J. P. und Mosteller, F. (1966). "Recognizing the Maximum of a sequence". In: *Journal of the American Statistical Association* 61.313, S. 35–73.

Petruccelli, J. D. (1980). "On a Best Choice Problem with Partial Information". In: *The Annals of Statistics* 8.5, S. 1171–1174.