Hochschule Aalen

Elektrotechnik

Anleitung zur Web-Applikation „Interpolationspolynome“

Bearbeitet von:

Timo Langner

SS 2021

ET/IE Semester 6

Betreut von:

Prof. Dr. Wilhelm Kleppmann

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

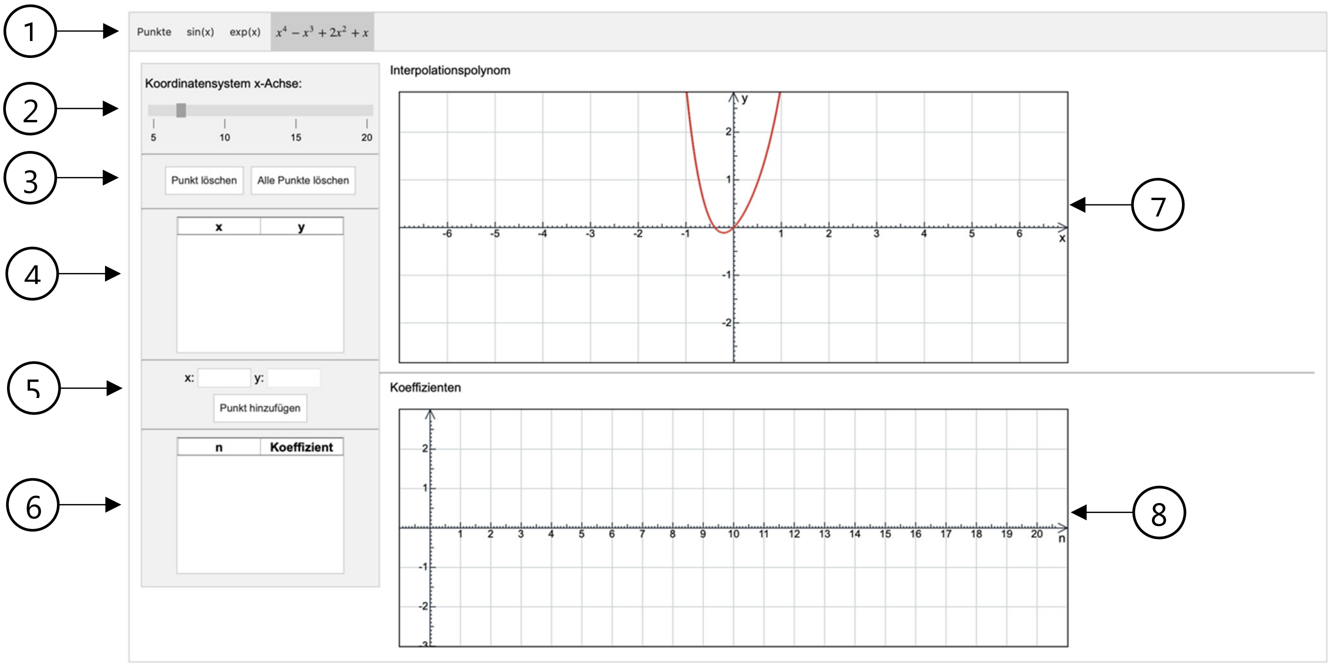
Die Web-Applikation „Interpolationspolynome“ ist im Rahmen der Projektarbeit im sechsten Semester des Elektrotechnik Studiums entstanden. Das Ziel des Tools ist es, Studenten eine Möglichkeit anzubieten, das in der Vorlesung behandelte Themengebiet der Interpolationspolynome durch Übungen und Visualisierungen zu vertiefen.

Die Studierenden können in der Applikation bis zu 20 Punkte zur Berechnung des Interpolationspolynoms vorgeben. Diese können wahlweise frei, oder so vorgegeben werden, dass sie auf den Funktionen $y = \sin x$, $y = e^x$ oder $y = x^4 - x^3 + 2x^2 + x$ liegen.
In einem Graph werden dann die Originalfunktion und das Interpolationspolynom angezeigt und die Punkte markiert. In einem weiteren werden die Koeffizienten angezeigt.

Die Applikation ermöglicht dabei auch das nachträgliche löschen, hinzufügen und verschieben der Punkte und zeigt die jeweiligen Koordinaten in einer Tabelle an.

1 Grafische Benutzeroberfläche

Die Benutzeroberfläche der Applikation hat folgenden Aufbau:



Legende:

1 Auswahl:	Auswahl zwischen Punkten, oder den Funktionen $y = \sin x$, $y = e^x$ oder $y = x^4 - x^3 + 2x^2 + x$
2 Achsenskalierung:	Skalierung der x-Achse
3 Punkte löschen:	Punkte können über die zwei Button entweder einzeln, oder komplett gelöscht werden
4 Punktdarstellung:	Punkte werden nach x aufsteigend sortiert in einer Tabelle dargestellt
5 Punkte hinzufügen:	Punkte können durch gültige x-/y-Eingabe über den Button hinzugefügt werden
6 Koeffizienten:	Koeffizienten werden nach n aufsteigend sortiert in einer Tabelle dargestellt
7 Funktionsgraph:	Im Funktionsgraph wird die Originalfunktion und das Interpolationspolynom dargestellt
8 Koeffizienten Graph:	Im Koeffizienten Graph werden die Koeffizienten in einem Balkendiagramm dargestellt.

1.1 Reiter zur Funktionsauswahl

1.1.1 Punkte

Bei Wahl des Punkte-Reiters können bis zu 20 Punkte frei vorgegeben werden. Entweder durch Linksklick in die obere Zeichenebene oder durch Koordinateneingabe.

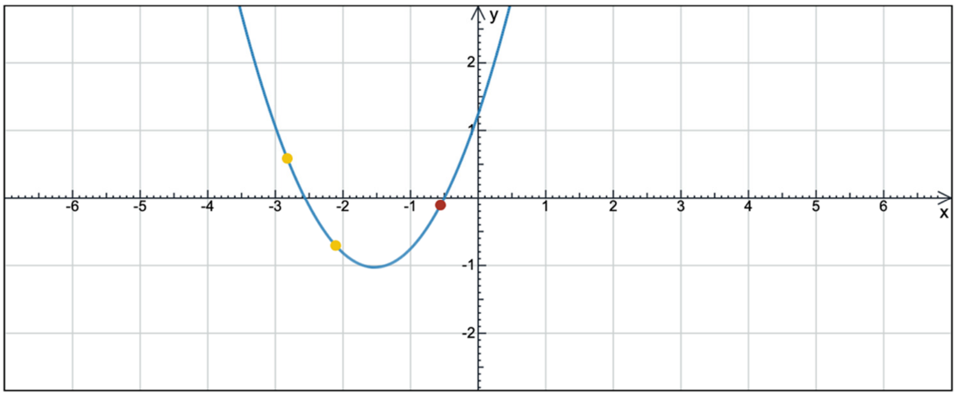
1.1.2 sin(x), e^x, $x^4 – x^3 + 2x^2 + x$

Bei Wahl der weiteren Reiter können bis zu 20 x-Koordinaten von Punkten vorgegeben werden. Durch Linksklick in die Zeichenebene wird die x-Koordinate gesetzt und der Funktionswert y berechnet.

1.2 Punktdarstellung

Alle hinzugefügten Punkte werden im Graphen und der Punktetabelle angezeigt.

x	y
-2.824	0.587
-2.108	-0.706
-0.557	-0.109



Punkte werden ausgewählt, indem man diese durch einen Linksklick in der Tabelle oder auf dem Graphen auswählt.
Der aktuell ausgewählte Punkt wird dann im Graphen als roter Punkt angezeigt und in der Tabelle grau hinterlegt.

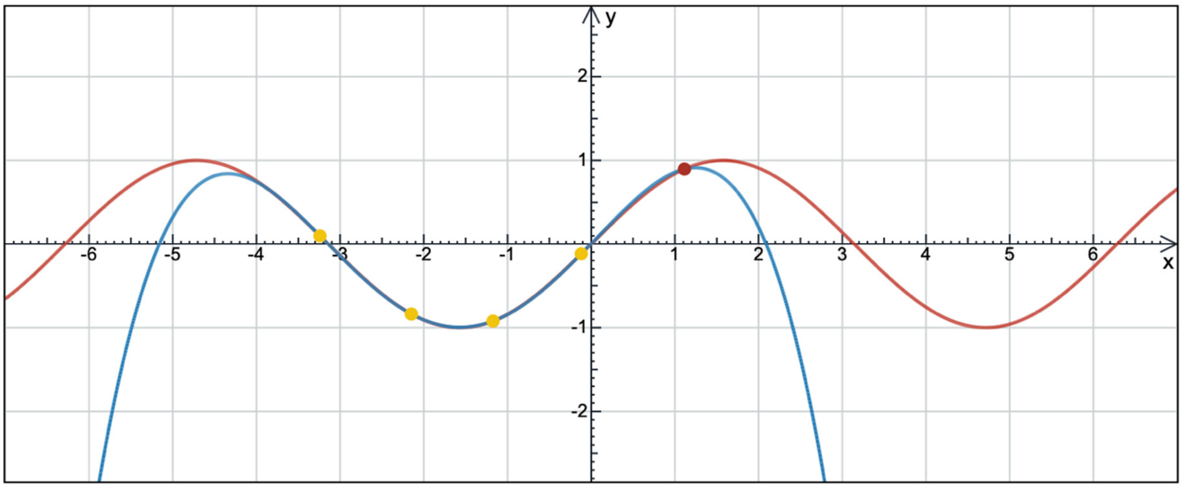
1.2.1 Funktionalitäten

Linksklick an leere Stelle: Ein neuer Punkt wird gesetzt und markiert. Punkte können jedoch nicht beliebig eng aneinandergesetzt werden und haben daher einen Mindestabstand.

Linksklick auf Punkt: Der Punkt wird markiert.

Rechtsklick auf Punkt: Der Punkt wird gelöscht.

Verschieben eines Punktes mit Linker Maustaste: Der Punkt wird verschoben und markiert.



Rote Kurve: Kurve der Originalfunktion

Blaue Kurve: Kurve des Interpolationspolynoms

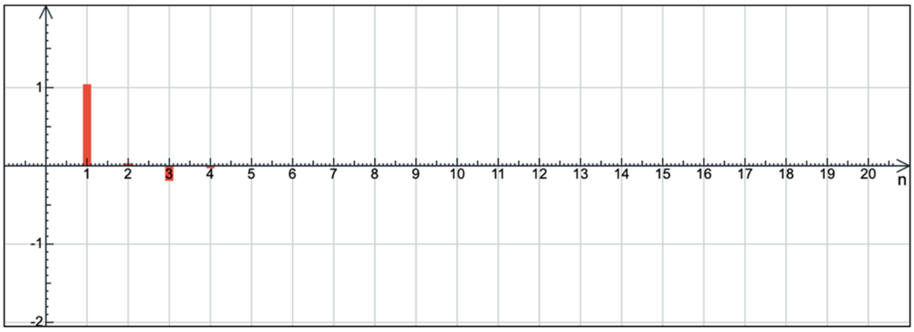
Gelber Punkt: Nicht markierter Punkt

Roter Punkt: Markierter Punkt

1.3 Koeffizienten Darstellung

Die Koeffizienten werden zum einen numerisch in der Tabelle aufgeführt und zum anderen in einem Balkendiagramm dargestellt.

n	Koeffizient
0	0.0044
1	1.0434
2	0.0341
3	-0.1914
4	-0.0308



Die Koeffizienten werden dem Grad nach aufsteigend sortiert. Wird ein neuer Punkt hinzugefügt steigt das Polynom um einen Grad und die Koeffizienten werden aktualisiert.

2 Allgemeine Informationen zur Applikation

2.1 Browserunterstützung

Die Applikation wurde unter Google Chrome, Firefox, Edge Chromium und Safari getestet. Bei keinem der aufgeführten Browser sind während des Tests Fehler aufgetreten.

2.2 Umsetzung der Applikation

Die Applikation wurde mithilfe von Vue.js und Math.js umgesetzt.

3 Übungen

3.1 Ziele

Interpolationspolynome sind Polynome, deren Graph exakt durch vorgegebene Punkte geht. Für n Punkte benötigt man im Allgemeinen ein Polynom des Grades (n–1). Im Gegensatz dazu verwendet man bei der Regression ein Polynom niedrigeren Grades, das dann natürlich nicht genau durch die vorgegebenen Punkte geht, sondern eine Näherung darstellt – vergleiche dazu die "Visualisierung zur linearen Regression" auf der Seite https://www.hs-aalen.de/de/pages/statistik-erleben_applets.

Diese Visualisierung soll verdeutlichen, dass Interpolationspolynome zwar exakt die vorgegebenen Punkte enthalten, dass sie trotzdem aber nur eingeschränkt als Näherungsfunktionen geeignet sind, da sie zum Schwingen neigen. Mit zunehmender Anzahl der Punkte wird die Näherung manchmal sogar schlechter – insbesondere, wenn die Punkte weit auseinander liegen und/oder zufällige Abweichungen enthalten.

In der Praxis werden für die Interpolation daher häufig abschnittsweise Polynome 3. Grades verwendet, die möglichst glatt ineinander übergehen (sog. kubische Splines). Handelt es sich bei den Punkten um Messwerte oder andere Versuchsergebnisse, werden zur empirischen Beschreibung des Zusammenhangs oft Näherungsgeraden (lineare Regression) oder Polynome 2. Grades (quadratische Funktion) verwendet. Abweichungen der Punkte von der angepassten Funktion werden als zufällige Mess- oder Versuchsfehler interpretiert.

3.2 Übungen mit der Visualisierung

Dieses Kapitel macht Vorschläge, die helfen sollen, die Ziele der Visualisierung zu erleben. Mit Reitern kann zwischen folgenden vier Möglichkeiten gewählt werden:

- **Punkte**: Bis zu 20 Punkte können frei eingegeben werden (mit "Punkt hinzufügen" oder einfaches Anklicken im Diagramm "Interpolationspolynom")

- **sin(x)**: Nur die x-Koordinate ist frei wählbar, die y-Koordinate ergibt sich fest als y=sin(x)
- **e^x**: Nur die x-Koordinate ist frei wählbar, die y-Koordinate ergibt sich fest als y=ex
- **$x^4–x^3+2x^2+x$**: Nur die x-Koordinate ist frei wählbar, die y-Koordinate ergibt sich fest als y= $x^4–x^3+2x^2+x$

3.2.1 Punkte

Fügen Sie zunächst einen beliebigen Punkt ein. Das Interpolationspolynom ist eine Konstante (=Polynom des Grades 0).

Fügen Sie einen zweiten Punkt hinzu. Das Interpolationspolynom ist eine Gerade durch diese beiden Punkte (= Polynom des Grades 2–1 = 1).

Fügen Sie einen dritten Punkt hinzu. Das Interpolationspolynom ist eine Parabel durch diese drei Punkte (= Polynom des Grades 3–1 = 2). Solange die drei Punkte gleichmäßig über den x-Bereich verteilt sind, entspricht das Interpolationspolynom gefühlsmäßig der Kurve, die man durch diese Punkte legen würde. Wählen Sie nun zwei Punkte, die in x eng beieinander liegen, sich in y aber deutlich unterscheiden. Beschreibt das Interpolationspolynom den Zusammenhang richtig (insbesondere, wenn die y-Werte sich nur zufällig aufgrund von Messfehlern unterscheiden)?

Fügen Sie nun weitere Punkte hinzu. Mit jedem zusätzlichen Punkt erhöht sich die Neigung des Interpolationspolynoms zum Schwingen – insbesondere, wenn einzelne x- Werte dicht beieinander liegen, während sich die y-Werte deutlich unterscheiden. Sind die Daten Versuchsergebnisse, so ist der dargestellte Verlauf meist keine plausible Beschreibung des tatsächlichen Zusammenhangs zwischen x und y. Die Anpassung eines Polynoms mit Grad 1 oder 2 mit Regression liefert plausiblere Beschreibungen des Zusammenhangs.

3.2.2 y = sin(x)

Nur die x-Koordinate ist frei wählbar, die y-Koordinate ergibt sich fest als y=sin(x).

Wählen Sie zunächst zwei nahe beieinander liegende x-Werte. Das Interpolationspolynom (Gerade) gibt eine gute Beschreibung des tatsächlichen

Verlaufs zwischen den Punkten (Interpolation), wenn diese ausreichend nahe und an den Flanken des sin(x) liegen.

Mit drei Punkten erhält man auch in der Umgebung der Minima und Maxima eine gute Beschreibung des Verlaufs zwischen den Punkten (Parabel), wenn diese ausreichend nahe beieinander liegen.

Weitere Punkte bringen nur dann eine Verbesserung, wenn sie nicht zu weit auseinander liegen. Günstig ist eine gleichmäßige Verteilung der Punkte. Liegen die Punkte zu weit auseinander oder zu ungleichmäßig verteilt, so erhält man keine sinnvolle Beschreibung des Zusammenhangs.

Außerhalb des mit den Punkten abgedeckten Bereichs besteht kein Zusammenhang zwischen Funktion und Interpolationspolynom (keine Extrapolation zulässig!). Die Potenzreihe von sin(x) enthält unendlich viele Potenzen, das Interpolationspolynom ist der Versuch einer Näherung mit endlich vielen Potenzen.

Vergleichen Sie Interpolationspolynome (gehen exakt durch verschiedene, vorgegebene Punkte) mit Taylorpolynomen (Potenzreihenentwicklung um einen festen Entwicklungspunkt mit Hilfe von Ableitungen) in der Visualisierung "Taylor-Entwicklung von Funktionen".

3.2.3 $y = e^x$

Nur die x-Koordinate ist frei wählbar, die y-Koordinate ergibt sich fest als $y = e^x$.

Wählen Sie zunächst zwei nahe beieinander liegende x-Werte. Das Interpolationspolynom gibt eine gute Beschreibung des tatsächlichen Verlaufs zwischen den Punkten (Interpolation), wenn diese ausreichend nahe beieinander liegen. Mit drei Punkten erhält man eine verbesserte Beschreibung des Verlaufs zwischen den Punkten, wenn diese ausreichend nahe beieinander liegen (weil auch die Krümmung berücksichtigt wird).

Weitere Punkte bringen nur dann eine Verbesserung, wenn sie nicht zu weit auseinander liegen. Günstig ist eine gleichmäßige Verteilung der Punkte. Liegen die Punkte zu weit auseinander, so erhält man keine sinnvolle Beschreibung des Zusammenhangs.

Außerhalb des mit den Punkten abgedeckten Bereichs besteht kein Zusammenhang zwischen Funktion und Interpolationspolynom (keine Extrapolation zulässig!).

3.2.4 $y = x^4 - x^3 + 2x^2 + x$

Nur die x-Koordinate ist frei wählbar, die y-Koordinate ergibt sich fest als $y = x^4 - x^3 + 2x^2 + x$.

Wählen Sie zunächst zwei nahe beieinander liegende x-Werte. Das Interpolationspolynom (Gerade) gibt eine gute Beschreibung des tatsächlichen Verlaufs zwischen den Punkten (Interpolation), wenn diese ausreichend nahe und an den Flanken des Polynoms liegen. Mit drei Punkten erhält man (wie bei sin(x) und e^x) eine verbesserte Beschreibung des Verlaufs zwischen den Punkten, wenn diese ausreichend nahe beieinander liegen (weil auch die Krümmung berücksichtigt wird).

Ab fünf Punkten stimmt das Interpolationspolynom exakt mit der vorgegebenen Funktion überein. Die ersten fünf Koeffizienten stimmen exakt mit dem vorgegebenen Polynom überein, alle höheren Potenzen sind exakt 0 (d.h. zusätzliche Punkte ändern das Polynom nicht mehr, da auch die Ausgangsfunktion nur endlich viele Potenzen enthält).

Hinweis: Dies gilt nur, wenn die Punkte exakt auf dem Polynom liegen. Auch kleine Abweichungen einzelner Punkte können bereits zu einer dramatischen Abweichung führen, insbesondere wenn die Anzahl der Punkte groß ist. Manchmal machen sich auch Rundungsfehler bemerkbar.

3.3 Mathematischer Hinweis

Es gibt verschiedene Vorgehensweisen, um die Koeffizienten zu berechnen (Newton, Lagrange, Lösen von Gleichungssystemen). Die Ergebnisse sind (nach Umformung bzw. Vereinfachung der Berechnungsformeln) jedoch identisch. Das Interpolationspolynom hängt nur von den verwendeten Punkten ab, nicht vom Verfahren, mit dem das Polynom bestimmt wird. Daher wird in dieser Visualisierung auch nicht zwischen den Verfahren unterschieden.