Hochschule Aalen

Elektrotechnik

Anleitung zur Web-Applikation „Taylor-Entwicklung“

Projektarbeit

Bearbeitet von:
Chantal Keller
75869
6. Semester – Elektrotechnik
SS 2021

Betreut von:
Prof. Dr. Wilhelm Kleppmann

Vorwort

Die Web-Applikation „Taylor-Entwicklung" war Teil der Projektarbeit im sechsten Semester des Studiengangs Elektrotechnik. Sie soll dazu dienen, den Studenten mehr Verständnis für die Mathematik, sowie einen praktischen Bezug auf die erlernten theoretischen Grundlagen zu vermitteln.

Diese Web-Applikation stellt wahlweise sin(x), cos(x), sinh(x), cosh(x), e^x, 1/x, x^2, x^3 oder x^4 zusammen mit den ersten Termen der Taylor-Reihe um einen Entwicklungspunkt x_0 in einer Grafik dar. Eine zweite Grafik zeigt die Koeffizienten der berücksichtigten Potenzen. Der Entwicklungspunkt x_0 und die höchste berücksichtigte Potenz n sind einstellbar. Die Visualisierung soll zeigen, dass:

- die Taylor-Entwicklung bis zur ersten Potenz die Tangente im Entwicklungspunkt x_0 ergibt
- die Taylor-Entwicklung eine umso bessere Näherung ergibt, je kleiner $|x - x_0|$ ist und je mehr Potenzen berücksichtigt werden
- die Taylor-Reihe für sin(x), cos(x), sinh(x), cosh(x) und e^x für beliebige x-Werte konvergiert, während sie für 1/x nur in einem bestimmten Bereich konvergiert; für x^2, x^3 und x^4 endet die Taylor-Reihe nach der 2., 3. bzw. 4. Potenz.

Inhaltsverzeichnis

1 Übersicht der Benutzeroberfläche

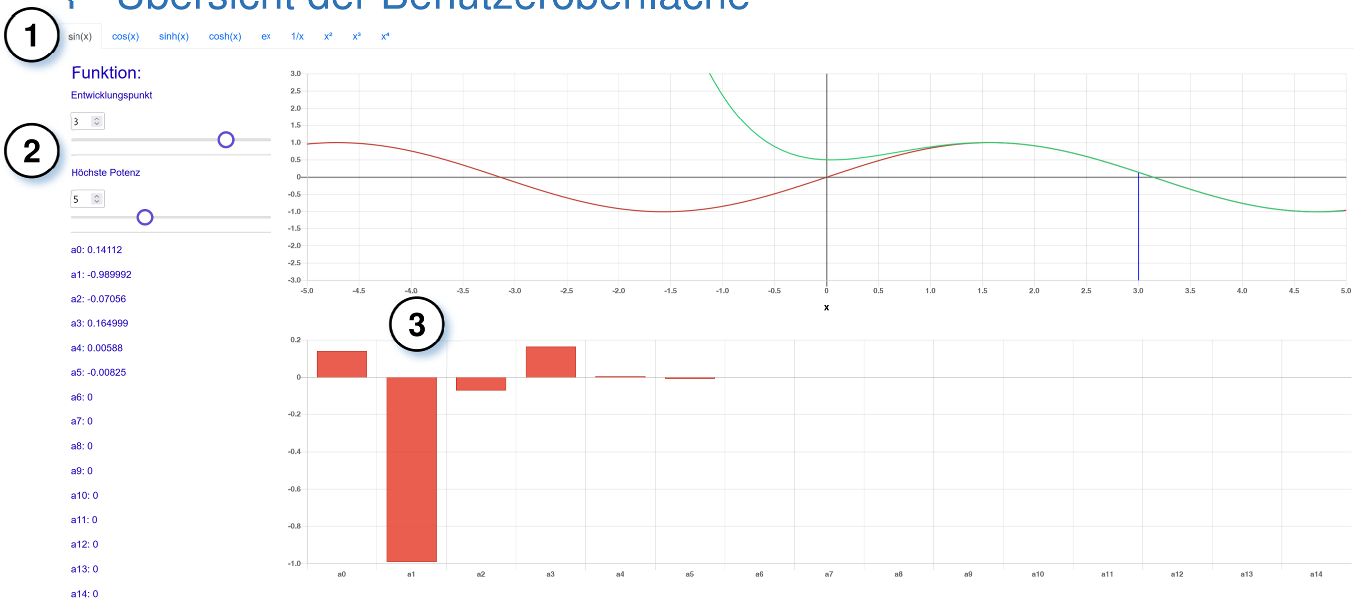


Abbildung 1: Benutzeroberfläche

Legende

1	Funktionsauswahlleiste	Ermöglicht das direkte Anwählen der Funktionen, ohne über die Menüleiste zu gehen
2	Parameter	Änderung der Parameter „Entwicklungspunkt“ und „Potenzen“ über die Eingabefelder oder über die Schieberegler. Außerdem werden hier die berechneten Werte der Koeffizienten angezeigt.
3	Anzeigebereich	Im oberen Zeichenbereich werden die Funktion (rot) und die Näherung (grün) dargestellt. Im unteren Zeichenbereich werden die Koeffizienten dargestellt.

2 Funktionsauswahlleiste

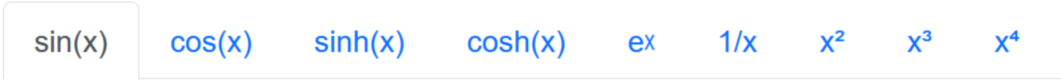


Abbildung 2: Funktionsauswahlleiste

Die Funktionsauswahlleiste ermöglicht es dem Benutzer, mit einem einfachen Mausklick die dargestellte Funktion zu wählen. Die Funktion, welche gerade aktiv ist, wird Schwarz und die restlichen Blau dargestellt.

Standardmäßig wird die Web-Applikation mit der Sinus-Funktion gestartet.

3 Eingabe der Parameter

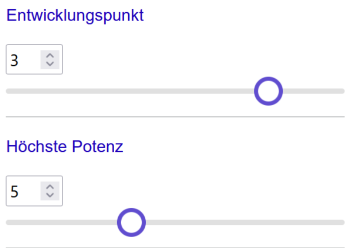


Abbildung 3: Parametereingabe

Hier hat der Benutzer die Möglichkeit, den Entwicklungspunkt x_0 und die höchste berücksichtigte Potenz **n** zu verändern. Die Anzeige reagiert sofort auf diese Änderungen.

Beim Starten der Visualisierung und beim Aufrufen einer neuen Funktion werden die jeweiligen Standardwerte geladen. Grundsätzlich bestehen zwei Möglichkeiten, auf die Parameter zuzugreifen. Entweder man ändert den Wert, indem man den Schieberegler benutzt, oder man tippt eine Zahl in das Eingabefeld ein und bestätigt diese mit *Enter*. Beim Entwicklungspunkt x_0 hat man außerdem noch eine dritte Möglichkeit, den Wert zu verändern. Man kann im oberen Zeichenbereich die blaue Linie mit Hilfe der Maus „nehmen“ und nach links oder nach rechts verschieben. Den eingestellten Wert kann man dann im Eingabefeld ablesen.

Bei allen Funktionen hat der Benutzer die Möglichkeit, die Werte des Entwicklungspunktes x_0 innerhalb der Grenzen -3,98 bis 3,98 zu wählen. Die höchste einstellbare Potenz **n** ist 14.

4 Ausgabe der Koeffizienten

a0: 0.14112

a1: -0.989992

a2: -0.07056

a3: 0.164999

a4: 0.00588

a5: -0.00825

a6: 0

a7: 0

a8: 0

a9: 0

a10: 0

a11: 0

a12: 0

a13: 0

a14: 0

Abbildung 4: Koeffizientenausgabe

Unterhalb der Eingabe der Parameter befindet sich die Ausgabe der Koeffizienten.

Hier werden die berechneten Zahlenwerte der Koeffizienten a_0 bis a_{14} der Taylorreihe bis auf die sechste Stelle nach dem Komma angezeigt.

Beim Start und beim Aufrufen einer neuen Funktion wird standardmäßig nur der Wert von a_0 angezeigt. Wenn der Benutzer über die Parametereingabe weitere Potenzen hinzufügt, erscheinen die jeweiligen Werte nacheinander in der Anzeige.

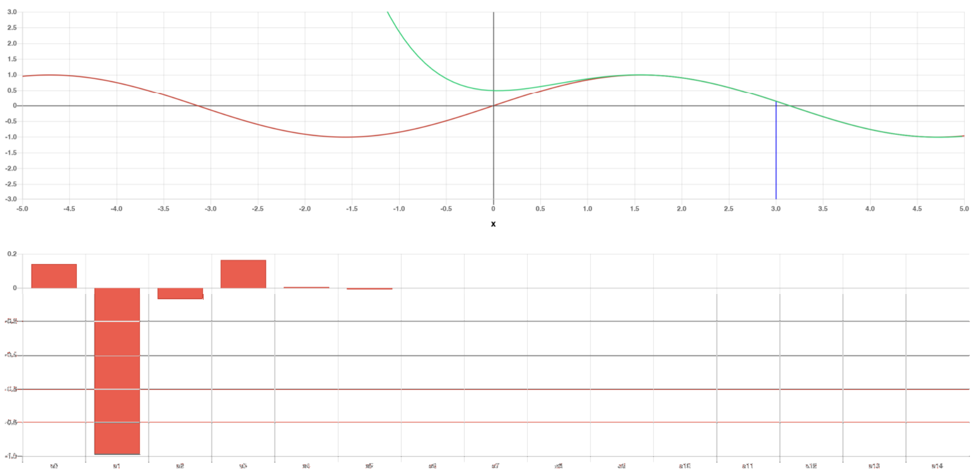
Hinweise:

Wenn man möglichst genaue Berechnungen erzielen möchte, sollte man den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x_0}$ nicht über die blaue Linie, sondern über den Schieberegler oder das Eingabefeld einstellen.

Bei großen Zahlenwerten wird die Exponentenform verwendet. Bei sehr kleinen Werten kann es vorkommen, dass 0 angezeigt wird, da nur die ersten sechs Stellen nach dem Komma berücksichtigt werden

5 Anzeigebereich

Der Anzeigebereich gliedert sich in zwei Zeichenbereiche:



Oberer Zeichenbereich

Unterer Zeichenbereich

Abbildung 5: Zeichenbereich

Oberer Zeichenbereich

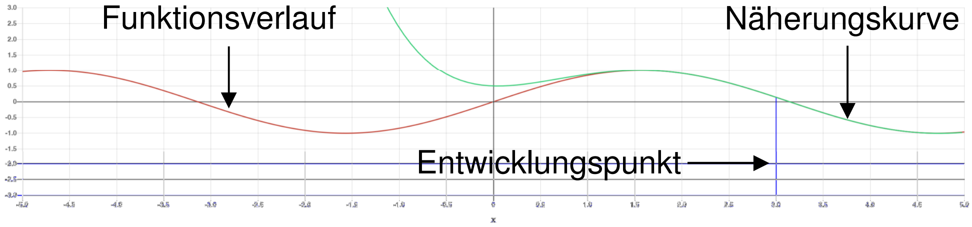


Abbildung 6: Oberer Zeichenbereich

Der obere Zeichenbereich liefert die Kurvenverläufe. Mit Rot wird die gewählte Funktion gezeichnet. Die Formel zu dieser Funktion steht in der oberen linken Ecke. Mit Grün wird die Näherungskurve dargestellt. Diese Kurve ändert sich, je nachdem wie viele Potenzen der Benutzer einstellt. Mit Blau wird der Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x_0}$ dargestellt. Bei der 1/x-Funktion wird zusätzlich in Pink der Konvergenzbereich gezeichnet.

Unterer Zeichenbereich

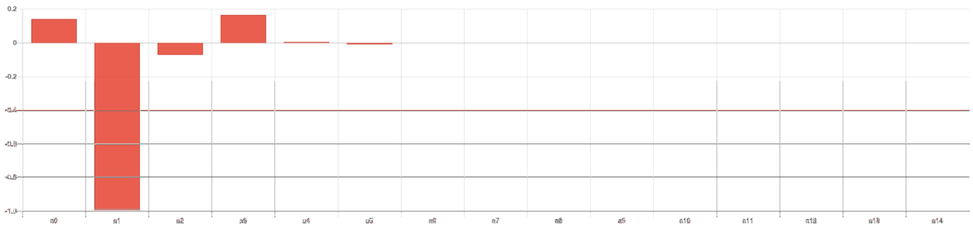


Abbildung 7: Unterer Zeichenbereich

Im unteren Zeichenbereich wird die Entwicklung der Koeffizienten a_0 bis a_{14} gezeichnet. Die y-Achse zeigt den Wert der Koeffizienten, die x-Achse gibt die Potenz (den Index n von a_n) an. Es erscheinen nur so viele Koeffizienten auf der x-Achse, wie es der Benutzer mit Hilfe des Parameters „Höchste Potenz“ einstellt.

6 Bedienung der Visualisierung

Der einfachste Weg die gewünschte Grundfunktion auszuwählen ist über die Funktionsauswahlleiste. Dadurch wird diese Funktion mit Standardparameterwerten geladen.

Die Parameter kann der Benutzer im Parametereingabebereich mittels Texteingabefeld oder dem zugehörigen Schieberegler nach seinen Wünschen innerhalb der gegebenen Grenzen setzen. Diese Werte werden sofort auf das Schaubild übertragen, damit die Änderungen direkt erkennbar werden.

Mit dem x_0-Wert kann bestimmt werden, um welchen Punkt die Taylorreihe entwickelt werden soll. Dieser Wert kann auch mittels Drag and Drop direkt im oberen Zeichenbereich verschoben werden.

Mit dem Parameter „Höchste Potenz“ kann die höchste Potenz bestimmt werden. Durch die Erhöhung dieses Wertes werden im unteren Zeichenbereich immer mehr Koeffizienten auftauchen und die Näherungskurve im oberen Zeichenbereich wird immer besser an die gewählte Funktion angenähert.

7 Informationen

Browserunterstützung

Browser, in welchen die Web-Applikation getestet wurde und fehlerfrei funktioniert, sind Google Chrome, Edge Chromium und Firefox.

Entwicklungsumgebung

Die Web-Applikation wurde umgesetzt in der Desktop-Anwendung *Atom*. Dies ist ein Open-Source Texteditor, welcher vom Projekt-Hosting-Dienst GitHub für diverse Betriebssysteme entwickelt wurde. Es erlaubt, beliebige Anwendungen mit JavaScript, HTML und CSS zu erstellen.

- https://atom.io/

Bibliotheken

Als Bibliotheken wurde *Math.js* und für die Erstellung der Graphen das Tool *Chart.js* verwendet.

- https://mathjs.org/
- https://www.chartjs.org/

Graphische Benutzeroberfläche

Mittels Bootstrap, welches ein freies Frontend-CSS-Framework ist, wurde die graphische Benutzeroberfläche für HTML erstellt. Es enthält auf HTML und CSS basierende Gestaltungsvorlagen.

- https://getbootstrap.com

8 Mathematischer Hintergrund

Wenn die Funktion f(x) an der Stelle x_0 beliebig oft differenzierbar ist, kann man sie in ihrem Konvergenzbereich als Taylor-Reihe entwickeln.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \quad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Bricht man diese Reihe nach einer endlichen Anzahl von Termen ab, so erhält man ein Taylor-Polynom, das eine Näherung für f(x) darstellt. Für sin(x), cos(x), sinh(x), cosh(x) und e^x konvergiert die Taylor-Reihe für beliebige x-Werte (beständig konvergent), während sie für 1/x nur im Bereich $0 < x < 2 \cdot x_0$ konvergiert (für $x_0 > 0$, ansonsten Relationen vertauscht).

Für x^n endet die Taylor-Reihe nach der n. Potenz und stellt x^n dann exakt dar, da das Taylor-Polynom nur eine Umsortierung der Funktion darstellt. Für $n = 2$ erhält man z.B.

$$x^2 = x_0^2 + 2x_0(x-x_0) + (x-x_0)^2 \quad \text{d.h. } a_0 = x_0^2; a_1 = 2x_0; a_2 = 1; a_3 = 0; \text{usw.}$$

Die Visualisierung zeigt im oberen Fenster als rote Kurve die ausgewählte Funktion, als blaue Linie den Entwicklungspunkt (Startwert ist normalerweise $x_0 = 0$, er kann mit dem oberen Schieber oder direkt mit der Maus verschoben werden) und als grüne Linie das Taylor-Polynom bis zur n. Potenz (Startwert ist immer $n = 0$, er kann mit dem unteren Schieber verändert werden). Im unteren Fenster zeigt die Web-Applikation die Koeffizienten a_n bis zur n. Potenz, daneben die Zahlenwerte als Liste.

9 Übungen mit der Visualisierung

Die folgenden Vorschläge sollen dabei helfen, die Eigenschaften von Taylor-Polynomen zu "begreifen". Viele weitere Übungen sind möglich.

9.1 Sinusfunktion sin(x)

Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$sin(0) = 0$, daher beginnt die Taylor-Entwicklung mit 0.

Erhöhen Sie die Potenz auf 1 – im oberen Bild erscheint die Tangente im Ursprung, im unteren Bild der Koeffizient $a_1 = 1$ (da y = 0 + 1· x).

Bei Potenz 2 ändert sich nichts, da sin(x) ungerade ist und gerade Potenzen daher verschwinden (y = 0 + 1· x + 0 $\cdot x^2$).

Bei Potenz 3 erscheint die beste kubische Näherung, $a_3 = -\frac{1}{6}$ (y = 0 + 1· x + 0 $\cdot x^2$ $-\frac{x^3}{6}$).

Bei Potenz 5 erscheint die nächste Verbesserung, usw. Beachten Sie, dass die Koeffizienten sehr schnell sehr klein werden. Mit 13 Potenzen ist im dargestellten x-Bereich keine Abweichung mehr erkennbar.

Verschieben Sie nun den Entwicklungspunkt – wenn die Funktion keine Symmetrie um den Entwicklungspunkt besitzt, treten alle Potenzen auf. Verschieben Sie nun den Entwicklungspunkt auf $\frac{\pi}{2} \cong 1{,}57096$ (am besten eintippen) – sin(x) ist zu diesem Punkt achsensymmetrisch, daher treten nur gerade Potenzen auf.

Im Entwicklungspunkt $\pi \cong 3{,}14159$ treten wieder nur ungerade Potenzen auf – sin(x) ist zu diesem Punkt wieder punktsymmetrisch. Außerdem ist bei kleinen x-Werten auch mit 14 Potenzen eine deutliche Abweichung zwischen Taylor-Polynom und Funktion erkennbar, x weicht hier zu stark von x_0 ab (für die vorgegebene höchste Potenz).

9.2 Cosinusfunktion cos(x)

Beachten Sie, dass die Koeffizienten für die Entwicklung von cos(x) um Entwicklungspunkt 0 exakt mit den Koeffizienten für die Entwicklung von sin(x) um Entwicklungspunkt $\frac{\pi}{2}$ übereinstimmen (der Kurvenverlauf in der Umgebung ist identisch).

Alle weiteren Eigenschaften ergeben sich in Analogie zu sin(x).

9.3 Hyperbelfunktionen sinh(x) und cosh(x)

sinh(x) ist ungerade um den Entwicklungspunkt 0, entsprechend sind die Koeffizienten mit den geraden Potenzen 0. Mit Potenz 5 wird im angezeigten Bereich bereits eine sehr gute Übereinstimmung erreicht.

cosh(x) ist gerade um den Entwicklungspunkt 0, entsprechend sind die Koeffizienten mit den ungeraden Potenzen 0. Mit Potenz 6 wird im angezeigten Bereich bereits eine sehr gute Übereinstimmung erreicht.

Die Zahlenwerte der Koeffizienten stimmen mit denen bei sin(x) bzw. cos(x) überein, nur die Vorzeichen sind hier alle positiv.

Bei Entwicklungspunkten $x_0 \neq 0$ treten gerade und ungerade Potenzen auf, da die Kurven zu diesen Punkten nicht symmetrisch sind. Bei Entwicklungspunkten am Rand des dargestellten Bereichs sind mehr Potenzen erforderlich, um eine gute Genauigkeit zu erreichen, da größere Werte für $|x - x_0|$ auftreten.

9.4 Exponentialfunktion e^x

Da e^x keine Symmetrie besitzt, treten alle Potenzen auf. Bei allen bisher betrachteten Funktionen nehmen die Koeffizienten mit zunehmendem n sehr schnell ab und die Konvergenz ist generell sehr gut.

9.5 Negative Potenz 1/x

1/x ist im Ursprung nicht definiert, daher liegt die Voreinstellung für den Entwicklungspunkt bei 1. Für diese Einstellung sind die Koeffizienten abwechselnd ±1. Die Reihe konvergiert nur für $0 < x < 2$. Außerhalb dieses Bereichs ist die Reihe nicht berechenbar. Mit jedem zusätzlichen Term oszilliert das Taylor-Polynom. Auch innerhalb dieses Bereichs ist die Konvergenz in der Nähe der Grenzen extrem langsam, sehr viele Terme sind erforderlich um eine gute Übereinstimmung zwischen Funktion und Taylor-Polynom zu erhalten.

Für Entwicklungspunkte $x_0 > 1$ nehmen die Koeffizienten wie $\frac{1}{x_0^{n+1}}$ ab, dadurch vergrößert sich der Konvergenzbereich auf den Bereich $0 < x < 2x_0$. Im Vergleich zu den bisher behandelten Funktionen nehmen die Beträge der Koeffizienten langsam ab, dadurch bleibt der Konvergenzbereich endlich.

Für Entwicklungspunkte $x_0 < 1$ nehmen die Beträge der Koeffizienten wie $\frac{1}{x_0^{n+1}}$ zu, dadurch verkleinert sich der Konvergenzbereich auf den Bereich $0 < x < 2x_0$. Für $x_0 < 0{,}4$ wird die Grafik unterdrückt, da sie nicht mehr sinnvoll darstellbar ist. Für Entwicklungspunkte $x_0 < 0$ gilt entsprechendes, nur dass nun alle Koeffizienten negativ sind.

Beachten Sie, dass $x = 0$ nie im Konvergenzbereich liegt. Dies ist verständlich, da die Ausgangsfunktion 1/x hier nicht definiert ist. Der Konvergenzbereich ist immer symmetrisch um den Entwicklungspunkt ("Konvergenzradius").

9.6 Potenzen x^2, x^3, x^4

Unabhängig vom Entwicklungspunkt sind alle Koeffizienten für Potenzen größer als die Potenz der zu entwickelnden Funktion exakt 0, die Taylor-Reihe hat nur endlich viele Terme, das Polynom ist exakt, wenn die Potenz ausreichend groß gewählt wird. Für kleinere Potenzen n ist das Taylor-Polynom eine Näherung, wie bei den anderen Funktionen.

10 Abbildungsverzeichnis