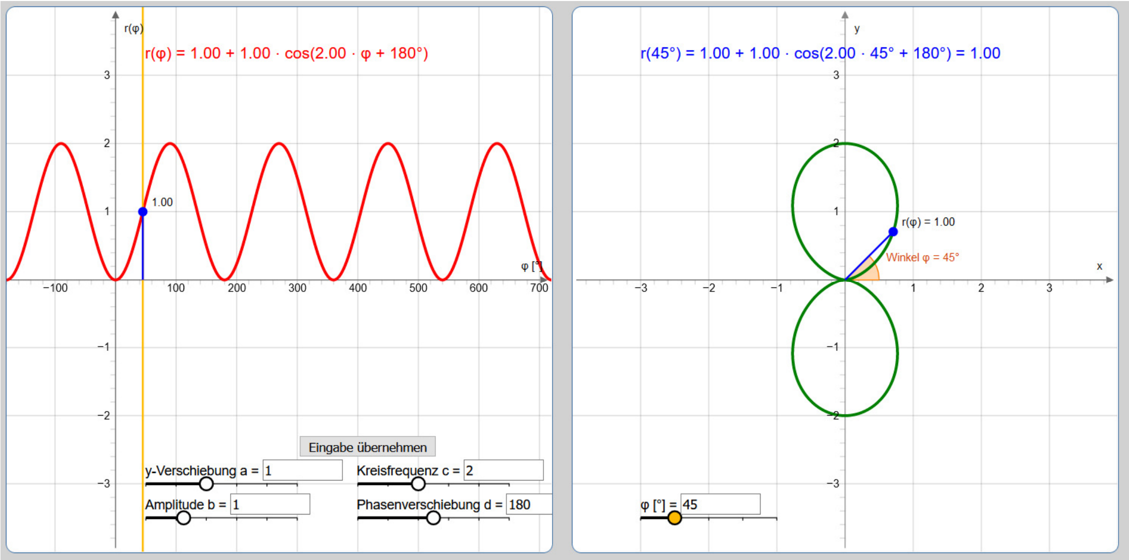
Anleitung zur Visualisierung

„Kurven in Polarkoordinaten“



Bearbeitung von:
Matthias Noé SS 2021
Studiengang Elektrotechnik

Betreuung durch:
Prof. Dr. Wilhelm Kleppmann

Inhalt

1 Vorwort

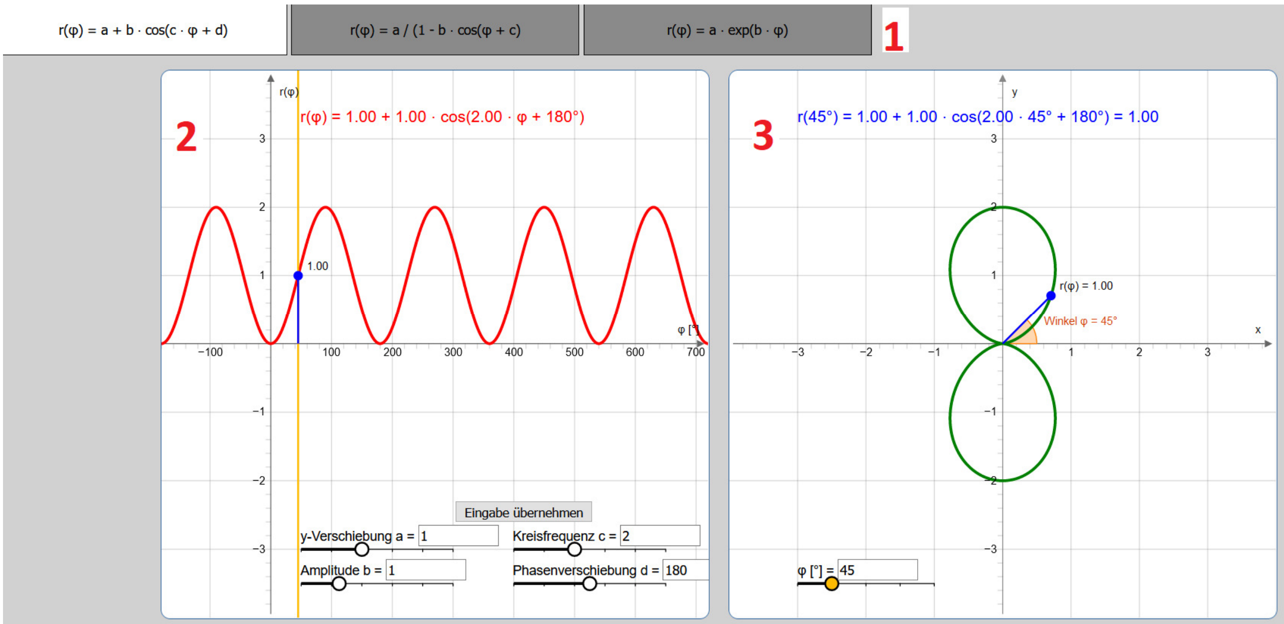
Die Entwicklung der JavaScript-Visualisierung „Kurven in Parameterform“ war Thema für meine Projektarbeit und basierte auf dem entsprechenden Java-Applet von Florian Pahling. Es soll dazu dienen, den Studenten mehr Verständnis für die Mathematik, sowie einen praktischen Bezug auf die erlernten theoretischen Grundlagen zu vermitteln.

Diese Visualisierung stellt verschiedene Funktionen für r(φ), sowie die daraus resultierende Kurve in der xy-Ebene grafisch dar. Die Form von r(φ) kann mit Schiebern verändert werden – so erlebt der Nutzer interaktiv, welche Bedeutung diese Parameter haben.

Die Visualisierung verfolgt zwei Ziele:

- Sie soll die wichtigsten Eigenschaften der betrachteten Funktionen verdeutlichen und ein qualitatives Verständnis für die Bedeutung der verschiedenen Parameter wecken.
- Sie soll verdeutlichen, welcher Zusammenhang zwischen der Form von r(φ) und der Kurve in der xy-Ebene besteht.

2 Grafische Benutzeroberfläche



Die Benutzeroberfläche ist in folgende Bereiche aufgeteilt:

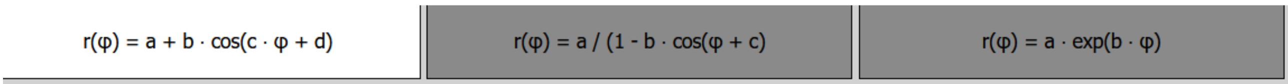
1 **Menüleiste**

2 **r als Funktion des Winkels bzw. Parameters** φ

3 **Resultierende Kurve in Polarkoordinaten, d.h. im xy-Koordinatensystem**

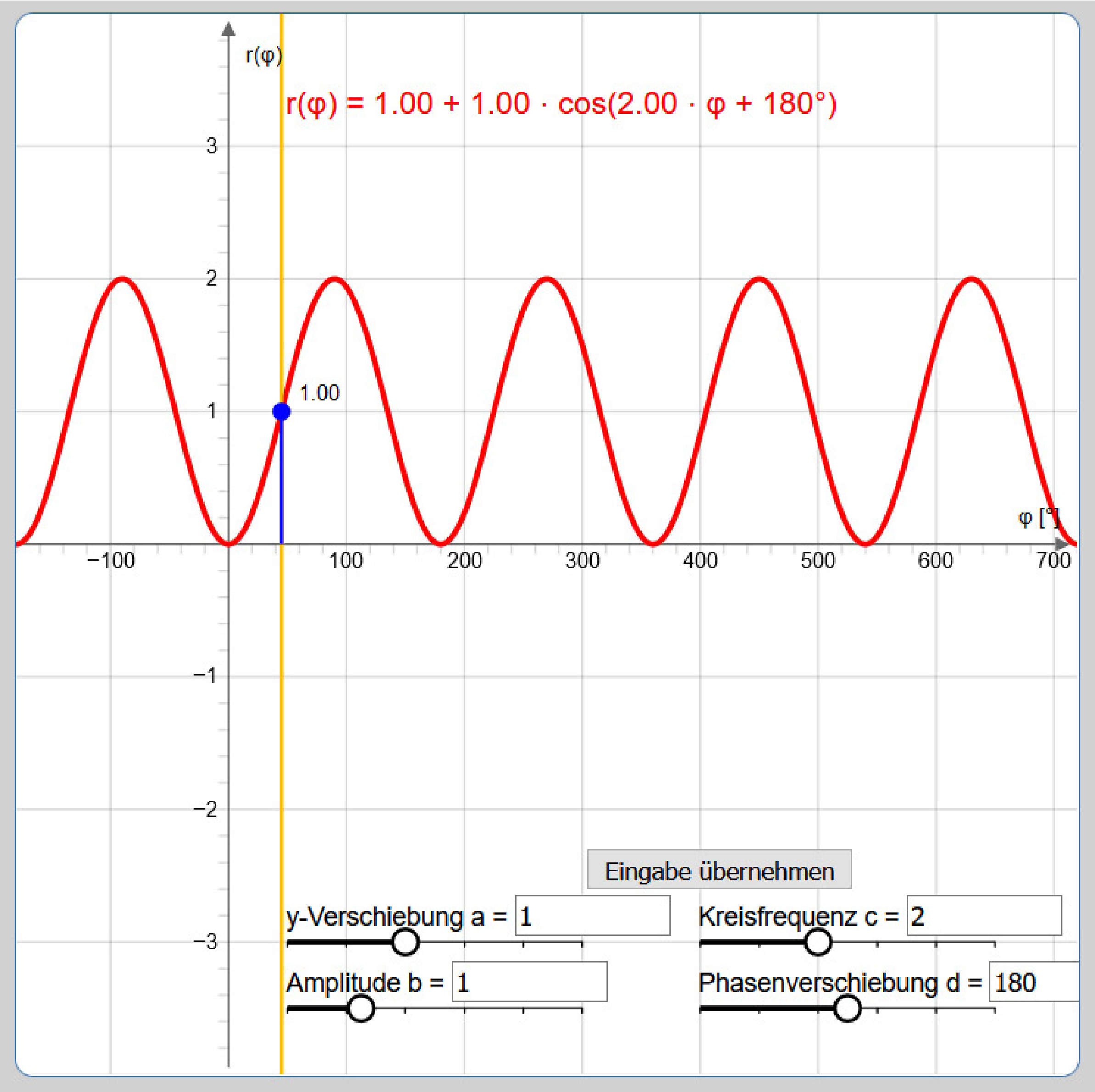
Beide Koordinatensysteme verfügen über interaktive Regler und Eingabefelder, mit denen die Darstellungen in Echtzeit angepasst werden können.

2.1 Menüleiste



In der Menüleiste kann man die verschiedenen Grundfunktionen auswählen und zwischen ihnen wechseln. Welche der Funktionen momentan aktiv sind, erkennt man an der Farbe der Reiter.

2.2 r als Funktion des Parameters φ



Hier wird die ausgewählte Funktion abhängig von φ dargestellt.

Der Nutzer hat nun verschiedene Möglichkeiten, sie zu manipulieren.

1) Schieber: Die Funktionsparameter können mittels der Schieber innerhalb eines bestimmten Wertebereichs angepasst werden. Hierdurch ändert sich die Funktionsdarstellung (sowie die Kurve in Polarkoordinaten im anderen Koordinatensystem) in Echtzeit.
2) Eingabefelder: Mittels der Eingabefelder kann der Nutzer präzise Werte für alle Parameter festlegen. Sobald er dann auf „Eingabe übernehmen“ klickt, aktualisiert

sich die Darstellung. In den Eingabefeldern lässt sich außerdem immer ablesen, welche Parameterwerte beispielsweise durch die Schieber eingestellt wurden.

3) Die gelbe Linie, welche im obigen Bildschirmfoto die Funktion senkrecht schneidet, lässt sich mittels „drag&drop“ verschieben. Hierdurch folgt der rote Punkt dem Funktionsverlauf. Gleichzeitig wird der φ-Wert aktualisiert und der Punkt im zweiten Koordinatensystem folgt dieser Änderung.

Die Funktionsgleichung der derzeit dargestellten Funktion lässt sich abhängig von den eingestellten Parametern immer oben im Koordinatensystem ablesen.

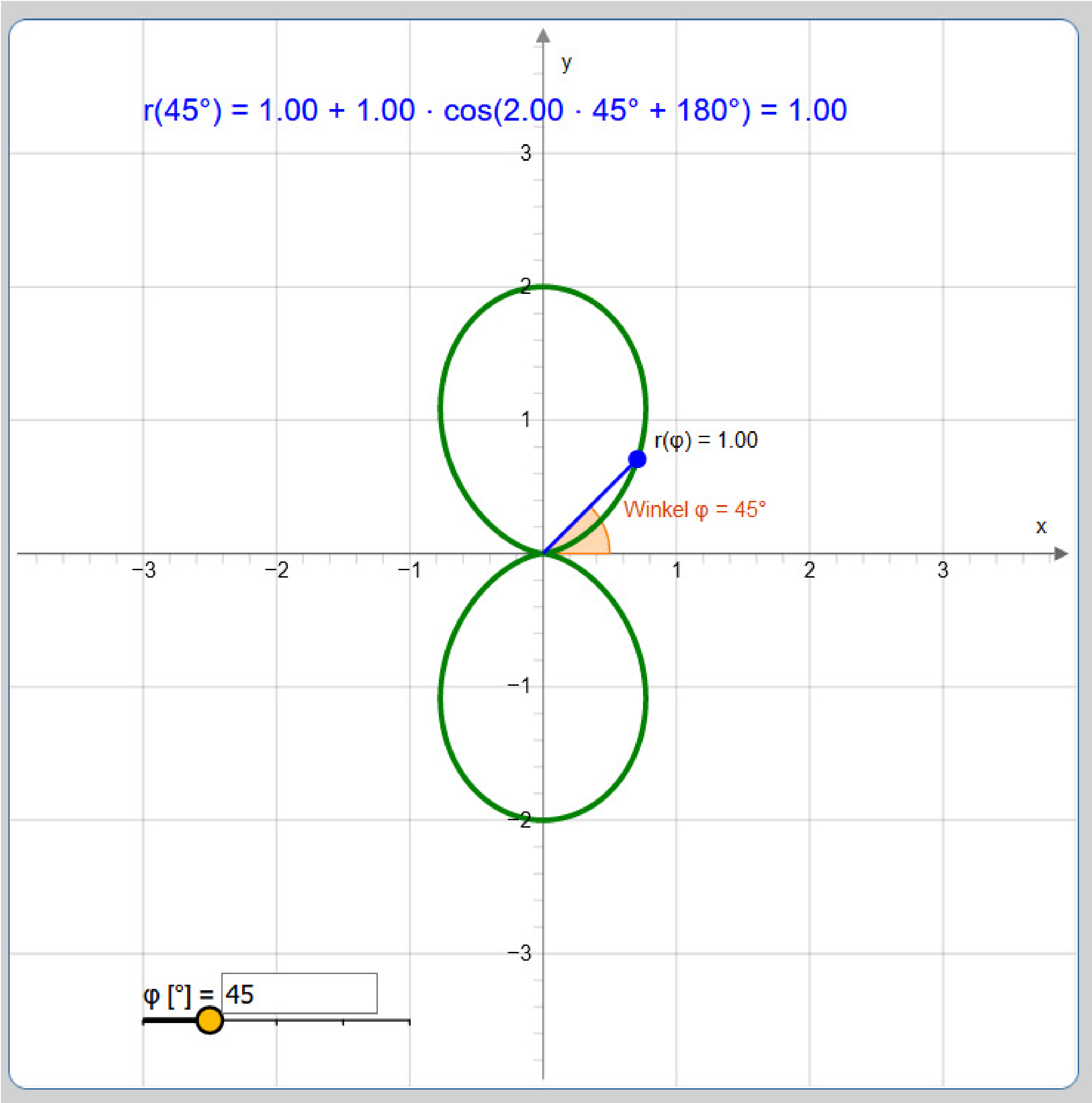
2.3 Resultierende Kurve in Polarkoordinaten

Hier wird in Grün die resultierende Kurve in Polarkoordinaten dargestellt. Der blaue Punkt korrespondiert immer mit jenem aus dem ersten Koordinatensystem (r ist der Abstand vom Ursprung, φ der Winkel zur positiven x-Achse).

Wenn φ sich ändert, bewegt sich der Punkt entlang der Kurve in Polarkoordinaten.

Mittels des gelb markierten Schiebers und der Eingabe im unteren Teil lässt sich auf gleiche Weise wie oben beschrieben der Wert für φ ändern. Insgesamt gibt es also drei Möglichkeiten, wie sich φ ändern lässt: Schieber, Eingabefeld und die gelbe Linie im linken Koordinatensystem.

Zum Verständnis der Polarkoordinaten ist es hilfreich, sich vor Augen zu führen, dass die blauen Linien im rechten und linken Koordinatensystem immer gleich lang sind, da sie den Betrag der Funktion darstellen. Der Unterschied ist, dass deren Phase links anhand der Abszisse und rechts durch den Winkel (in Grad), in welchem die Linie vom Ursprung des Koordinatensystems ausgeht, dargestellt wird.



3 Benutzerhinweise

Die Visualisierung ist für eine Fensterauflösung von 1920x1080 Pixel optimiert.

Die Änderung der Auflösung während der Nutzung führt zu Verschiebungen in den Koordinatensystemen, die das Erscheinungsbild beeinträchtigen. Zur Behebung des Problems kann die Seite einfach neu geladen werden (was allerdings auch alle Parameterwerte zurücksetzt).

4 Ziele der Visualisierung

Diese Visualisierung soll verdeutlichen, wie Kurven in Polarkoordinaten zustande kommen.

Bei Kurven in Polarkoordinaten ist der Abstand r eines Punktes als Funktion des Winkels φ zur positiven x-Achse gegeben. Für jeden Wert von φ, für den $r(\varphi)\geq 0$ ist, erhält man so einen Punkt $P(x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi)$ in der xy-Ebene. Dies ist eine Parameterdarstellung mit dem Winkel φ als Parameter (vgl. Kurven in Parameterdarstellung).

Mit der Visualisierung können verschiedene Funktionen für r(φ) ausgewählt werden. Im linken von zwei Bildern wird dann diese Funktion dargestellt, im rechten Bild wird die resultierende Kurve in Polarkoordinaten in der xy-Ebene dargestellt. Um den Zusammenhang zwischen den beiden Bildern zu verdeutlichen, kann im rechten Bild ein beliebiger φ-Wert vorgegeben werden. Im linken Bild wird der zugehörige Wert für r(φ) durch die blaue Linie eingezeichnet, im rechten Bild wird derselbe Wert für r in die durch φ vorgegebene Richtung aufgetragen.

Verändern Sie nun den φ -Wert und beobachten Sie, wie der ausgewählte Punkt im rechten Bild die Kurve durchläuft. So entsteht Punkt um Punkt die Kurve in Polarkoordinaten.

Um den Zusammenhang zwischen r(φ) einerseits und der Kurve in Polarkoordinaten andererseits noch weiter zu verdeutlichen, können auch die Funktionen r(φ) selbst mit Schiebern verändert werden. Das rechte Bild zeigt dann live, wie sich dadurch die Kurve in Polarkoordinaten verändert.

5 Wie entsteht eine Kurve in Polarkoordinaten?

Starten Sie die Visualisierung. Im linken Bild zeigt sie $r(\varphi) = 1 + 1\cos(2\varphi + 180°)$ – eine um 1 nach oben verschobene Cosinus-Schwingung mit Amplitude 1 und Frequenz 2 sowie einer Phasenverschiebung um 180°.

Bei φ =45° ist blau der zugehörige Funktionswert $r(45°) = 1 + 1\cos(2x45°+180°) = 1$ eingezeichnet. Das rechte Bild zeigt die entstehende Kurve in Polarkoordinaten. In Richtung 45° zur positiven x-Achse, ist blau der Abstand 1 aus dem linken Bild eingetragen.

6 Kurvenverlauf für ausgewählte r(φ)

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die im oberen Fenster darstellbaren Funktionen, einschließlich der interaktiv mit Schiebern veränderbaren Parameter. Wählen Sie die gewünschte Funktion aus, verändern Sie die Parameter und erleben Sie ihre Wirkung!

3.1 $r(\varphi) = a + b \cdot \cos(c \cdot \varphi + d)$

Der Cosinus ist periodisch mit Periode $2\pi/c$ bzw. $360°/c$.

- a verschiebt r(φ) im linken Bild parallel in y-Richtung. r-Werte zwischen a-b und a+b treten auf. Solange a>b ist, ist r immer positiv. Für a<b treten auch negative r-Werte auf. Da ein negativer Abstand r vom Ursprung jedoch nicht definiert ist, heißt dies, dass in diesen Winkelbereichen im rechten Bild keine Punkte eingezeichnet sind. Der kleinste r-Wert ist immer 0, und dies ist der Ursprung, unabhängig von φ.
- b verändert die Amplitude der Schwingung im linken Bild – und wirkt wie bereits beschrieben.
- c verändert die Periode bzw. die Frequenz der Schwingung im linken Bild. Bei ganzzahligen Werten (c = 1, 2, 3, …) erhält man im rechten Bild eine geschlossene Kurve mit c Punkten maximalen Abstands vom Ursprung. Bei anderen Werten von c ist die Kurve nach einem Durchlauf von 0° bis 360° nicht geschlossen. Im Bild werden zwei Durchläufe dargestellt – wegen der Periodizität schließt sich z.B. bei c=1,5 die Kurve nach zwei Durchläufen.
- d verändert im linken Bild die Phase um d/c, im rechten Bild bewirkt es eine Drehung im Uhrzeigersinn um den angegebenen Winkel.

Sonderfälle:

a=b, c=1 und d=0 ergibt die Kardioide oder Herzkurve – testen Sie, warum die Kurve so heißt.

a=0, c=1 und d=0 ergibt einen Kreis mit Radius b/2 und Mittelpunkt $x_M=b/2$; $y_M=0$ – andere Werte für d drehen den Mittelpunkt um d im Uhrzeigersinn.

a=0, c=2 und d=0 ergibt eine liegende "Acht", c=3 ein Kleeblatt, c=4 ein vierblättriges Kleeblatt.

3.2 $r(\varphi) = \frac{a}{1-b\cdot\cos(\varphi + c)}$ (Kegelschnitte)

- a>0 ist ein Skalenparameter und verändert nur die Größe, nicht aber die Form der Kurve im rechten Bild.
- b verändert die Form der Kurve im rechten Bild.
  Mit dem Startwert b=0 erhält man einen Kreis mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung (im linken Bild ist r=a, unabhängig von φ).
  Für 0<b<1 erhält man eine Ellipse, von der ein Brennpunkt im Ursprung liegt. b ist die numerische Exzentrizität.
  Für b=1 erhält man eine Parabel mit Brennpunkt im Ursprung.
  Für b>1 erhält man den rechten Ast einer Hyperbel mit Brennpunkt im Ursprung.
- c verändert im linken Bild die Phase, im rechten Bild bewirkt es eine Drehung im Uhrzeigersinn um den angegebenen Winkel.

Wenn b<1 ist, wird der Nenner in r(φ) nie 0, d.h. r(φ) ist immer endlich und für alle φ definiert – die Kurve umschließt den Ursprung in alle Richtungen.

Wenn b=1 ist, ist r(φ) für φ = -c nicht definiert, r ist nicht beschränkt.

Wenn b>1 ist, ist r ebenfalls nicht beschränkt und es gibt einen Winkelbereich, in dem r(φ)<0 – dieser Winkelbereich wird vom betrachteten Hyperbel-Ast nicht erreicht.

3.3 $r(\varphi) = a \cdot e^{b\cdot\varphi}$ (Spirale)

- a>0 verändert den Maßstab.
- b>0 bewirkt, dass r r(φ) exponentiell zunimmt – die Spirale geht nach außen.
  b<0 bewirkt, dass r(φ) exponentiell abnimmt – die Spirale geht nach innen, r→0,
  wenn φ →∞.
  Für b=0 erhält man einen Kreis, da r dann nicht von φ abhängt.

7 Ableitung von Kurven in Polarkoordinaten

Die Ableitung ist die Steigung der Tangente im betrachteten Punkt (vgl. Visualisierung "Grundfunktionen und ihre Ableitung"). Für Kurven in Polarkoordinaten muss man unterscheiden zwischen Ableitungen nach dem Winkel und Ableitungen nach x.

- $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ ist die Steigung von r(φ) im linken Bild an der gewählten Stelle.
- $y' = \frac{dy}{dx}$ ist die Steigung von y(x) im rechten Bild an der gewählten Stelle.

Es gilt:

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \;\Rightarrow\; x'(\varphi) = r'(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$$

$$y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \;\Rightarrow\; y'(\varphi) = r'(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{r'(\varphi) * \sin(\varphi) + r(\varphi) * \cos(\varphi)}{r'(\varphi) * \cos(\varphi) - r(\varphi) * \sin(\varphi)}$$

8 Hinweise für nachfolgende Studienarbeiten

Diese Visualisierung wurde mit der JavaScript-Bibliothek „JSXGraph“ der Universität Bayreuth erstellt, die frei im Netz verfügbar und ohne Einschränkungen nutzbar ist. Die Bibliothek ist in der Version v1.2.3 als JS-Datei im Applet eingebunden.

Für die Lizenzvereinbarung siehe: https://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wp/index.html