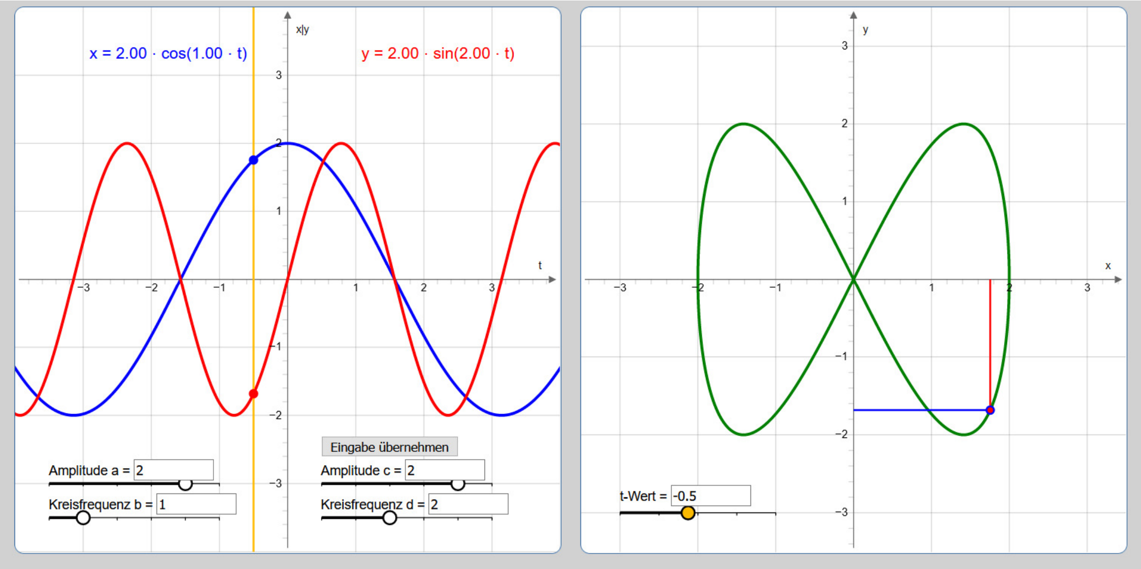
Anleitung zur Visualisierung

„Kurven in Parameterform“



<u>Bearbeitung von:</u>
Matthias Noé SS 2021
Studiengang Elektrotechnik

<u>Betreuung durch:</u>
Prof. Dr. Wilhelm Kleppmann

Inhalt

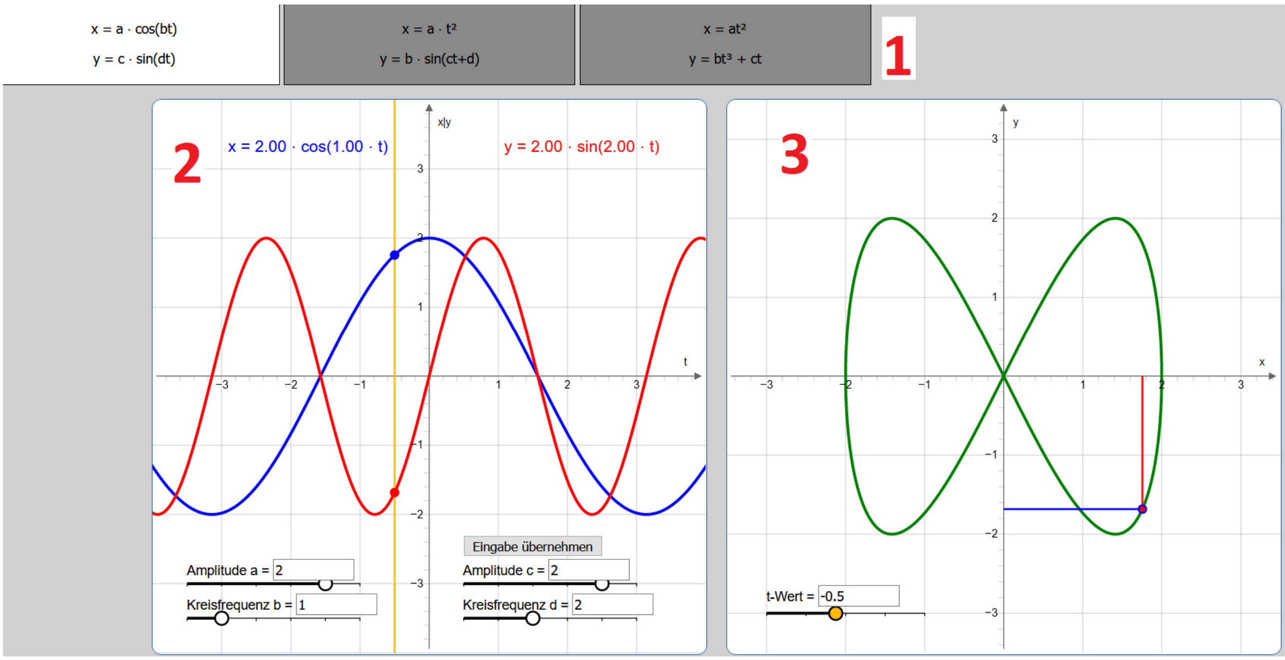
1 Vorwort

Die Entwicklung der JavaScript-Visualisierung „Kurven in Parameterform“ war Thema für meine Projektarbeit und basierte auf dem entsprechenden Java-Applet von Pascal Klipstein. Es soll dazu dienen, den Studenten mehr Verständnis für die Mathematik, sowie einen praktischen Bezug auf die erlernten theoretischen Grundlagen zu vermitteln.

Diese Visualisierung stellt verschiedene Funktionen für x(t) und y(t), sowie die daraus resultierende Kurve in der xy-Ebene grafisch dar (t ist ein Parameter wie z.B. die Zeit). Die Form von x(t) und y(t) kann mit Schiebern verändert werden – so erlebt der Nutzer interaktiv die Zusammenhänge. Die Visualisierung verfolgt zwei Ziele:

- Sie soll verdeutlichen, wie die Kurve in der xy-Ebene aus den Funktionen x(t) und y(t) entsteht.
- Sie soll zeigen, welcher Zusammenhang zwischen den Eigenschaften von x(t) und y(t) einerseits und der Form der Kurve andererseits besteht.

2 Grafische Benutzeroberfläche



Die Benutzeroberfläche der Visualisierung ist in folgende Bereiche aufgeteilt:

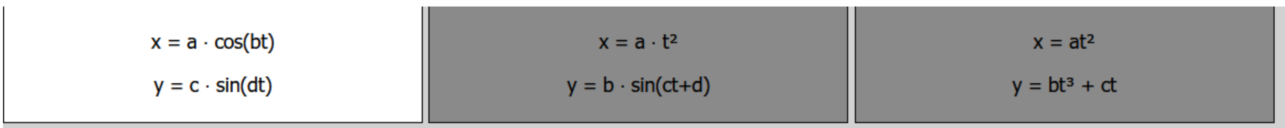
1 **Menüleiste**

2 **x und y als Funktion des Parameters t**

3 **Resultierende Kurve in Parameterform, d.h. im xy-Koordinatensystem**

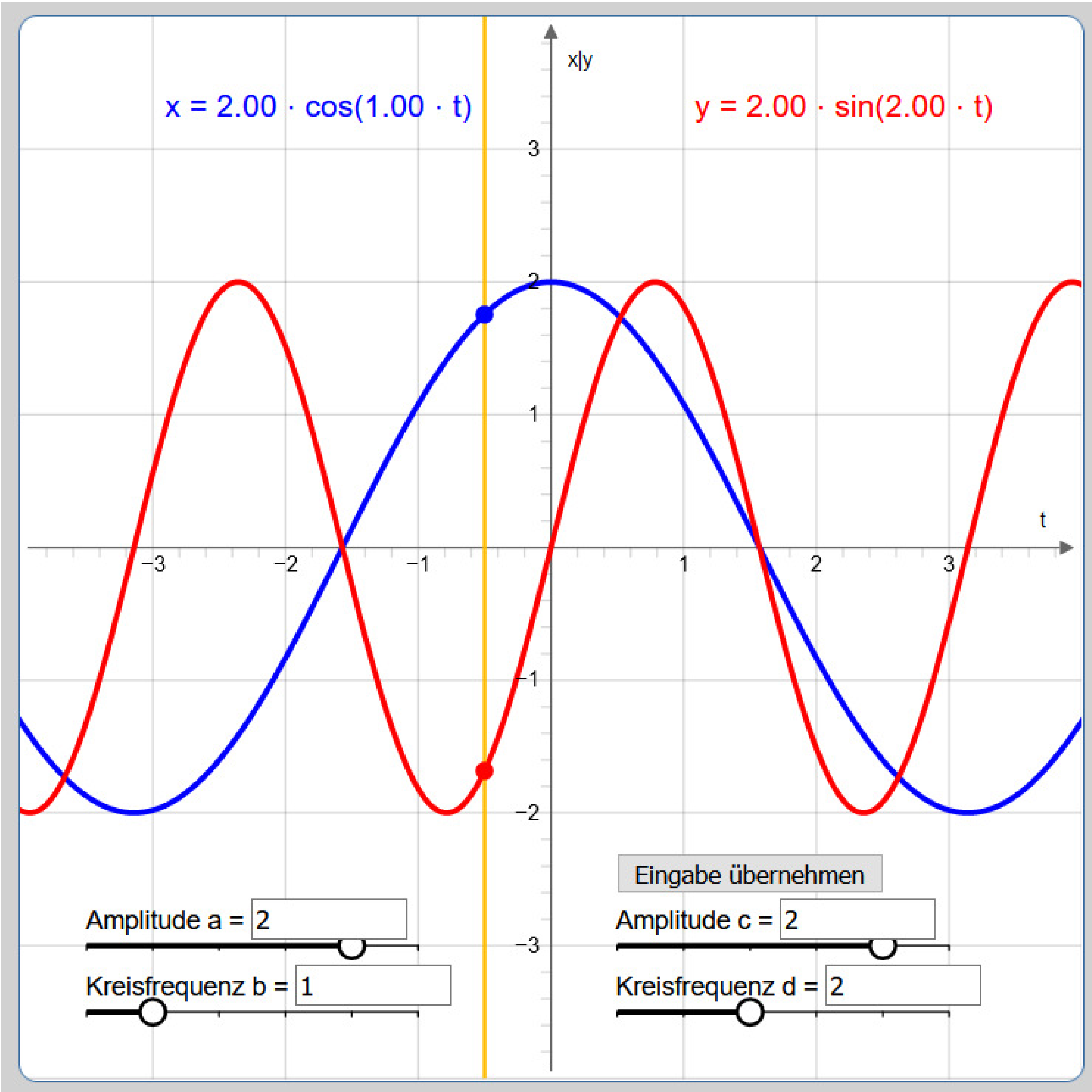
Beide Koordinatensysteme verfügen über interaktive Regler und Eingabefelder, mit denen die Darstellungen in Echtzeit angepasst werden können.

2.1 Menüleiste



In der Menüleiste kann man die verschiedenen Grundfunktionen auswählen und zwischen ihnen wechseln. Welche der Funktionen momentan aktiv sind, erkennt man an der Farbe der Reiter.

2.2 x und y als Funktion des Parameters t



Hier werden die beiden ausgewählten Funktionen abhängig von t in den Farben rot und blau dargestellt.

Der Nutzer hat nun verschiedene Möglichkeiten, sie zu manipulieren.

1) Schieber: Die Funktionsparameter können mittels der Schieber innerhalb eines bestimmten Wertebereichs angepasst werden. Hierdurch ändern sich die Funktionsdarstellungen (sowie die Kurve in Parameterform im anderen Koordinatensystem) in Echtzeit.

2) Eingabefelder: Mittels der Eingabefelder kann der Nutzer präzise Werte für alle Parameter festlegen. Sobald er dann auf „Eingabe übernehmen“ klickt, aktualisieren sich die Darstellungen. In den Eingabefeldern lässt sich außerdem immer ablesen, welche Parameterwerte beispielsweise durch die Schieber eingestellt wurden.
3) Die gelbe Linie, die im obigen Bildschirmfoto beide Funktionen senkrecht schneidet, lässt sich mittels „drag&drop“ verschieben. Hierdurch folgen der rote und der blaue Punkt den Funktionsverläufen. Gleichzeitig wird der t-Wert aktualisiert und der parametrisierte Punkt im zweiten Koordinatensystem folgt dieser Änderung, da sich dessen Koordinaten aus den x/y-Werten des roten und blauen Punktes zusammensetzen.

Die Funktionsgleichungen der derzeit dargestellten Funktionen lassen sich abhängig von den eingestellten Parametern immer oben im Koordinatensystem ablesen.

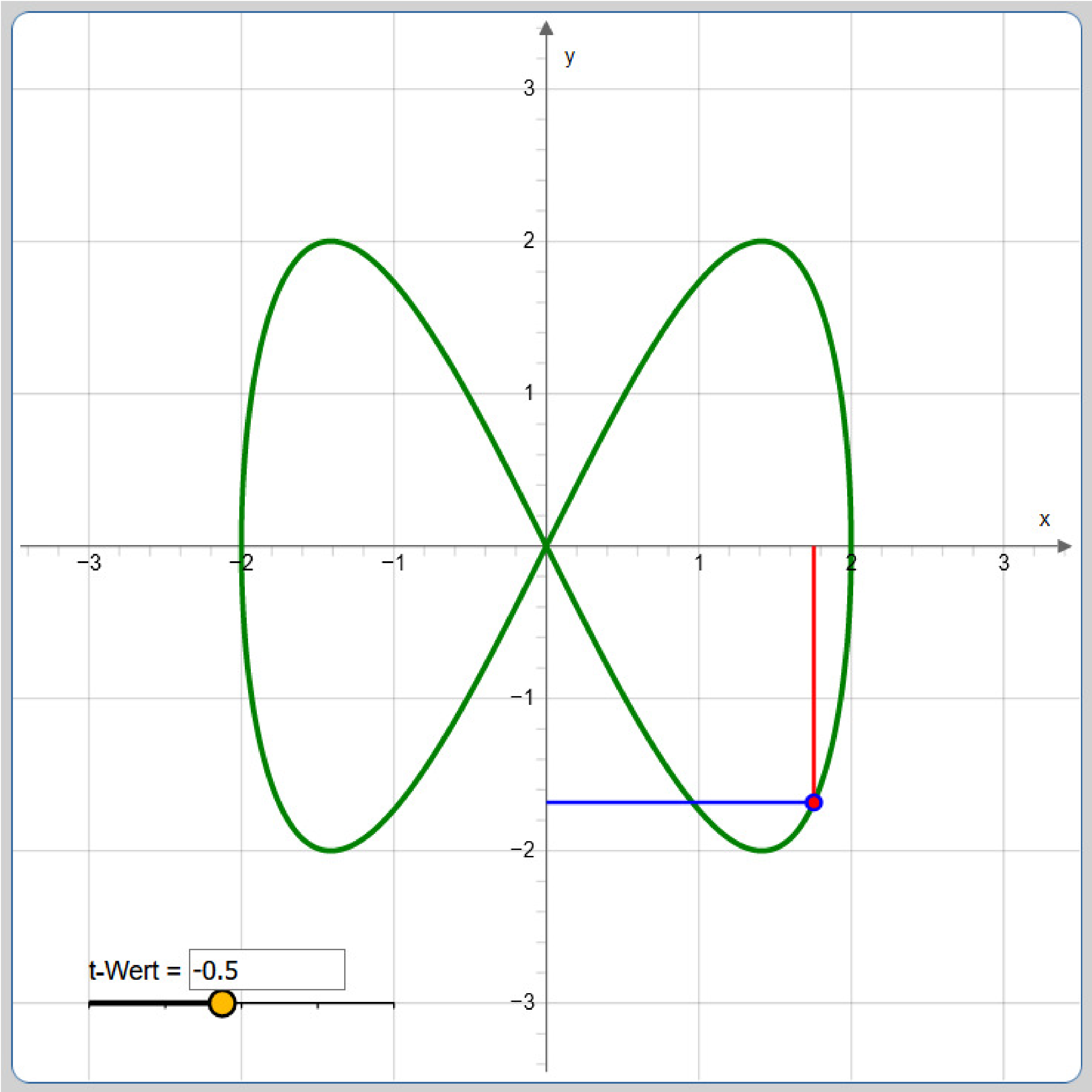
2.3 Resultierende Kurve in Parameterform

Hier wird in Grün die resultierende Kurve in Parameterform dargestellt. Der rot-blaue Punkt korrespondiert immer mit den x- und y-Werten aus dem linken Koordinatensystem.

Wenn t sich ändert, bewegt sich der Punkt entlang der Kurve in Parameterform – entsprechend der Kurve im Oszilloskop, wenn x(t) und y(t) die Spannung an den beiden Klemmen ist.

Mittels des gelb markierten Schiebers und der Eingabe im unteren Teil lässt sich auf gleiche Weise wie oben beschrieben der Wert für t ändern. Insgesamt gibt es also drei Möglichkeiten, wie sich t ändern lässt: Schieber, Eingabefeld und die gelbe Linie im linken Koordinatensystem.

Zum Verständnis der Parameterform ist es hilfreich, sich vor Augen zu führen, dass die roten und blauen Linien im rechten Koordinatensystem in ihrer Länge genau den links durch die roten und blauen Punkte dargestellten x/y-Werten der beiden Funktionen entsprechen.



3 Benutzerhinweise

Die Visualisierung ist für eine Fensterauflösung von 1920x1080 Pixel optimiert.
Die Änderung der Auflösung während der Nutzung führt zu Verschiebungen in den Koordinatensystemen, die das Erscheinungsbild beeinträchtigen. Zur Behebung des Problems kann die Seite einfach neu geladen werden (was allerdings auch alle Parameterwerte zurücksetzt).

4 Ziele der Visualisierung

Diese Visualisierung soll verdeutlichen, wie Kurven in Parameterform zustande kommen.

Bei Kurven in Parameterform sind x und y als Funktion eines Parameters t gegeben (x(t) und y(t)). Für jeden Wert von t erhält man so einen Punkt P(x(t), y(t)) in der xy-Ebene.

Durchläuft t ein Intervall [a, b], so durchläuft der Punkt P eine Kurve in der xy-Ebene – die Kurve in Parameterform.

Mit dem Applet können verschiedene Funktionen für x(t) und y(t) ausgewählt werden. Im linken von zwei Bildern werden dann diese beiden Funktionen in blau und rot dargestellt, im rechten Bild wird die resultierende Kurve in der xy-Ebene grün dargestellt. Um den Zusammenhang zwischen den beiden Bildern zu verdeutlichen, kann ein beliebiger t-Wert vorgegeben werden. Die zugehörigen x- und y-Werte werden dann im rechten Bild ebenfalls blau und rot hervorgehoben.

Verändern Sie nun den t-Wert und beobachten Sie, wie der ausgewählte Punkt im rechten Bild die Kurve durchläuft. So entsteht Punkt um Punkt die Kurve in Parameterform.

Um den Zusammenhang zwischen x(t) und y(t) einerseits und der Kurve in Parameterform andererseits noch weiter zu verdeutlichen, können auch die Funktionen x(t) und y(t) selbst mit Schiebern verändert werden. Das rechte Bild zeigt dann live, wie sich dadurch die Kurve in Parameterform verändert.

5 Wie entsteht eine Kurve in Parameterform?

Experimentell kann man Kurven in Parameterform mit einem Oszilloskop erzeugen: x(t) ist die momentane Auslenkung in x-Richtung, y(t) in y-Richtung.

Starten Sie die Visualisierung. Im linken Bild zeigt es $x = 2.00 \cdot \cos(1.00 \cdot t)$ und
$y = 2 \cdot \sin(2.00 \cdot t)$ – Schwingungen mit Amplitude 2, die Frequenz in y-Richtung ist doppelt so groß wie in x-Richtung. Der Parameter t im linken Bild ist beim Oszilloskop die Zeit. Die gelbe Linie zeigt den gerade ausgewählten Zeitpunkt. Das rechte Bild zeigt die entstehende

Kurve in Parameterform. x- und y-Koordinate zum Zeitpunkt t sind blau und rot markiert, entsprechend der Farbe im linken Bild.

Verschieben Sie nun t (mit dem t-Schieber im rechten Bild oder direkt anhand der gelben Linie im linken Bild) und beobachten Sie, wie der markierte Punkt im rechten Bild die Kurve durchläuft. So lassen Sie quasi den Elektronenstrahl über das Oszilloskop laufen. Die grüne Kurve zeigt den gesamten Verlauf.

6 Kurvenverlauf für ausgewählte x(t) und y(t)

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die im linken Fenster darstellbaren Funktionen, einschließlich der interaktiv mit Schiebern veränderbaren Parameter. Wählen Sie das gewünschte Funktionspaar aus, verändern Sie die Parameter und erleben Sie ihre Wirkung!

6.1 $x(t) = a \cdot \cos(b \cdot t)$, $y(t) = c \cdot \sin(d \cdot t)$

Sinus und Cosinus sind periodisch und zueinander um $\pi/2$ phasenverschoben.

- a und c verändern die Amplituden im linken Bild und damit die maximale Auslenkung in x- bzw. y-Richtung im rechten Bild
- b und d verändern die Frequenzen – und damit die Form der Kurve im rechten Bild, wichtig ist dabei vor allem das Verhältnis der Frequenzen.

In der Starteinstellung ist das Verhältnis 1:2 – die y-Werte verändern sich doppelt so schnell wie die x-Werte, es entsteht die Form einer liegenden Acht. Verändern Sie nun d auf 3.00, dann 4.00 und 5.00 – es entstehen ähnliche, aber entsprechend komplexere Kurven.

Da cos(bt) gerade und sin(dt) ungerade ist, schauen die Kurven völlig anders aus, wenn d=1 und b=2, 3, 4 bzw. 5 ist. Testen Sie nun andere ganzzahlige Werte für b und d.

Für a=c und b=d erhält man einen Kreis.

Stehen die Frequenzen in keinem ganzzahligen Verhältnis (wie 1:2, 3:5, 3:2) zueinander, so stimmen Start- und Endpunkt nicht überein. Da im rechten Bild zur besseren Übersicht nur t-Werte von -4 bis 4 dargestellt werden, scheint die Kurve am entsprechenden Punkt zu beginnen und zu enden. Ohne diese Begrenzung der t-Werte entstehen bei rationalen Verhältnissen (wie z.B. 1,53:2,04 – nur solche sind wegen der Rundung auf zwei Nachkommastellen mit der Visualisierung darstellbar) zwar sehr komplexe, aber geschlossene Kurven. Bei irrationalen Verhältnissen (wie z.B. π :1) schließt sich die Kurve nie.

Da x(t) gerade und y(t) ungerade ist, ist die Kurve in Parameterform immer symmetrisch zur x-Achse, da es zu jedem Punkt x(t), y(t) auch einen Punkt x(-t)=x(t), y(-t)=-y(t) gibt.

Die hier dargestellten Kurven heißen auch Lissajous-Figuren (vgl. z.B. http://de.wikipedia.org/wiki/Lissajous-Figur).

6.2 $x(t) = a \cdot t^2$, $y(t) = b \cdot \sin(c \cdot t + d)$

x(t) ist in eine Richtung unbegrenzt, y(t) liegt immer zwischen –b und +b.

- a verändert den Maßstab in x-Richtung, für a>0 treten nur positive x-Werte auf, für a<0 nur negative. Im Prinzip sind die x-Werte unbegrenzt, da aber nur t-Werte von -4 bis 4 dargestellt werden, erscheint die Kurve bei $|a| < 0{,}25$ begrenzt.
- b verändert den Bereich der y-Werte: y(t) liegt immer zwischen –b und +b.
- c verändert die Frequenz in y-Richtung: je größer c, desto schneller verändert sich der y-Wert. Beachten Sie, dass bei d=0 die Kurvenform nur vom Verhältnis c/a abhängt.
- Solange d=0, ist die Kurve symmetrisch zur x-Achse, da x(t) gerade und y(t) ungerade ist. $d \neq 0$ zerstört diese Symmetrie.

6.3 $x(t) = a \cdot t^2$, $y(t) = b \cdot t^3 + c \cdot t$

x(t) ist in eine Richtung unbegrenzt, y(t) in beide Richtungen. Da x(t) gerade und y(t) ungerade ist, ist die Kurve in Parameterform immer symmetrisch zur x-Achse.

- a verändert den Maßstab in die x-Richtung, für a>0 treten nur positive x-Werte auf, für a<0 nur negative.

- b und c verändern die y-Werte. Haben b und c unterschiedliche Vorzeichen, so schneidet y(t) die t-Achse in drei Punkten und die Kurve in Parameterdarstellung hat Schleifenform. Haben b und c dasselbe Vorzeichen, so schneidet y(t) die t-Achse nur im Ursprung und die Kurve in Parameterdarstellung schneidet die x-Achse nur im Punkt (0, 0).

7 Ableitung von Kurven in Parameterform

Die Ableitung ist die Steigung der Tangente im betrachteten Punkt (vgl. Applet "Grundfunktionen und ihre Ableitung"). Für Kurven in Parameterform muss man unterscheiden zwischen Ableitungen nach dem Parameter und Ableitungen nach x.

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ist die Steigung von x(t) im **linken** Bild an der gewählten Stelle.

$\dot{y} = \frac{dx}{dt}$ ist die Steigung von y(t) im **linken** Bild an der gewählten Stelle.

$y' = \frac{dx}{dt}$ ist die Steigung von y(x) im **rechten** Bild an der gewählten Stelle.

Überzeugen Sie sich selbst, dass $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, indem Sie in linken Bild gezielt Punkte mit großer und kleiner Steigung $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ und auch mit unterschiedlichen Vorzeichen der Steigungen auswählen und die zugehörige Steigung im rechten Bild betrachten. Besonders informativ ist es, einen Punkt mit negativem $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zu wählen: y' ist positiv. Wird nun t langsam erhöht, so erniedrigen sich x und y gleichzeitig (negative $\dot{x}$ und $\dot{y}$), aber entlang einer Kurve mit positiver Steigung.

8 Hinweise für nachfolgende Projektarbeiten

Diese Visualisierung wurde mit der JavaScript-Bibliothek „JSXGraph“ der Universität Bayreuth erstellt, die frei im Netz verfügbar und ohne Einschränkungen nutzbar ist. Die Bibliothek ist in der Version v1.2.3 als JS-Datei in der Visualisierung eingebunden.

Für die Lizenzvereinbarung siehe: https://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wp/index.html