Übungen mit dem Applet „erwartungstreu“

1 Begriffe und statistischer Hintergrund

Stichprobenergebnisse x_i unterliegen der Zufallsstreuung, daher streuen auch Kennwerte, die aus den Stichprobenergebnissen berechnet werden.

Der **Stichprobenmittelwert** $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ ist ein **erwartungstreuer** Schätzwert für den Mittelwert μ der Verteilung. Dies bedeutet, dass der Mittelwert der Mittelwerte vieler Stichproben sich immer mehr dem wahren Mittelwert μ annähert.

Die **Stichprobenvarianz** $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ ist ein **erwartungstreuer** Schätzwert für die Varianz der Verteilung. Dies bedeutet, dass der Mittelwert der Varianzen vieler Stichproben sich immer mehr der wahren Varianz σ^2 annähert.
Beim Vergleich der Formeln für Mittelwert und Varianz fällt auf, dass bei der Varianz die Summe über n quadrierte Abweichungen durch n – 1 geteilt wird, nicht durch die Anzahl der Summanden. Nur so erhält man einen erwartungstreuen Schätzwert. Die **Varianz der Population oder Varianz (1/n)** $= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ ist **kein erwartungstreuer** Schätzwert für die Varianz σ^2 der Verteilung. Der Mittelwert der Varianzen (1/n) vieler Stichproben nähert sich immer mehr dem Wert $\frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$.

Noch überraschender ist, dass $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ **kein erwartungstreuer** Schätzwert für die **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ der Verteilung ist. Der Mittelwert der Standardabweichungen vieler Stichproben nähert sich immer mehr dem Wert $a_n \cdot \sigma$ an, wobei $a_n<1$ vom Stichprobenumfang n abhängt. Es gilt z.B. a_2=0,798, a_3=0,886 und a_4=0,921. Mit zunehmendem n unterscheidet sich a_n immer weniger von 1, z.B. a_{10}=0,973, a_{20}=0,987 und a_{50}=0,995.
Da die Standardabweichung kein erwartungstreuer Schätzwert ist, wird bei der Zusammenfassung mehrerer Stichproben immer über die Varianzen gemittelt und nicht über die Standardabweichungen.

Mit dem Applet werden viele Stichproben aus derselben Grundgesamtheit gezogen. Der Umfang der Stichproben und deren Anzahl werden vorgegeben. Die grafischen Darstellungen sollen zeigen, dass

- die Stichprobenergebnisse streuen
- Mittelwerte weniger streuen als Einzelwerte (um den Faktor $1/\sqrt{n}$)
- die Verteilung der Einzelwerte, Mittelwerte, Varianzen und Standardabweichungen über viele Stichproben berechnet werden kann
- Mittelwert und Varianz erwartungstreue Schätzwerte sind, Varianz (1/n) und Standardabweichung aber nicht.

2 Visualisierungen mit dem Applet

2.1 Zufallsstreuung der Einzelwerte

Wählen Sie den Reiter „Werte“ in der Grafik.

Geben Sie mit einen beliebigen Mittelwert und eine Standardabweichung>0 vor. Wählen Sie einen großen Wert (z.B. 1000 oder 5000) für die Anzahl Stichproben und experimentieren Sie mit verschiedenen Werten für n (Stichprobenumfang z.B. 4 und 20).

Starten Sie für jede Einstellung die Simulation mehrmals mit und beobachten Sie

- Für jede Simulation erhält man andere Werte (=Zufallsstreuung), aber die Verteilung der Einzelwerte (Histogramm) stimmt näherungsweise mit der vorgegebenen Verteilung (Glockenkurve) überein.
- Die Verteilung der Einzelwerte (Histogramm) ist unabhängig vom Stichprobenumfang, mit zunehmendem Stichprobenumfang erhält man nur mehr Einzelwerte, sie liegen daher dichter.
- Der Mittelwert bestimmt die Lage des Maximums, die Standardabweichung die Breite der Verteilung (auf die Skalierung achten, sie wird automatisch angepasst)

2.2 Mittelwerte

Wählen Sie den Reiter „Mittelwerte“ in der Grafik, Simulationen wie in 2.1.

Beobachten Sie in der oberen Grafik:

- Die Form der Verteilung der Mittelwerte $\bar{x}$ ist wieder eine Normalverteilung (Glockenkurve), die Verteilung ist jedoch um den Faktor $1/\sqrt{n}$ schmäler als bei den Einzelwerten: Zufällige Abweichungen der Einzelwerte gleichen sich zum Teil aus.

- Die Form der Verteilung der Mittelwerte (Histogramm) kann vorausberechnet werden (Glockenkurve). Obwohl Einzelwerte nicht vorausgesagt werden können, erhält man insgesamt berechenbare Ergebnisse: Die Gesetze des Zufalls sind bekannt.

Die untere Grafik zeigt jeweils den Mittelwert über die Mittelwerte aller Messreihen (Stichproben) bis zur betrachteten Stelle (d.h. der 1. Punkt stimmt mit dem 1. Punkt der oberen Grafik überein (aber andere Skalierung), der 2. Punkt ist der Mittelwert der ersten beiden Punkte der oberen Grafik, …, der 1000. Punkt ist der Mittelwert der ersten 1000 Punkte der oberen Grafik). So kann man das Verhalten des Mittelwerts über die Mittelwerte vieler Stichproben grafisch ablesen. Dieser Mittelwert verändert sich immer weniger und nähert sich dem vorgegebenen Mittelwert μ.

Dieses Verhalten bedeutet: Der Mittelwert $\bar{x}$ ist ein erwartungstreuer Schätzwert für μ.

2.3 Varianz

Wählen Sie den Reiter „Varianzen“ in der Grafik, Simulationen wie in 2.1.

Beobachten Sie:

- Obere Grafik: Die Form der Verteilung der Varianzen s^2 ist schief (bis auf die Skalierung der Achse ist es die χ^2-Verteilung). Keine Werte <0 treten auf. Je größer n ist, desto schmäler und symmetrischer ist die Verteilung. Bei einer großen Stichprobe streut die Varianz weniger als bei einer kleinen Stichprobe.
- Die untere Grafik zeigt jeweils den Mittelwert über die Varianzen aller Stichproben bis zur betrachteten Stelle (d.h. der 1. Punkt stimmt mit dem 1. Punkt der oberen Grafik überein, der 2. Punkt ist der Mittelwert der ersten beiden Punkte der oberen Grafik, …, der 1000. Punkt ist der Mittelwert der ersten 1000 Punkte der oberen Grafik). Auch hier verändert sich der Mittelwert immer weniger und nähert sich der vorgegebenen Varianz σ^2. Die Varianz s^2 ist ein erwartungstreuer Schätzwert für σ^2.

2.4 Varianz (1/n)

Wählen Sie den Reiter „Varianzen (1/n)“ in der Grafik, Simulationen wie in 2.1.

Beobachten Sie:

- Obere Grafik: Die Form der Verteilung der Varianzen ist schief (bis auf die Skalierung der Achse ist es die χ^2-Verteilung). Keine Werte <0 treten auf. Je größer n ist, desto schmäler und symmetrischer ist die Verteilung. Bei einer großen Stichprobe streut die Varianz weniger als bei einer kleinen Stichprobe.

- Die untere Grafik zeigt wie in 2.3 beschrieben jeweils den Mittelwert über die Varianzen aller Stichproben bis zur betrachteten Stelle. Auch hier verändert sich der Mittelwert immer weniger. Im Gegensatz zu 2.3 nähert er sich aber nicht der vorgegebenen Varianz σ^2, sondern dem zu kleinen Wert $\frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$. Der systematische Fehler ist umso größer, je kleiner n ist. Die Varianz (1/n) ist **kein** erwartungstreuer Schätzwert für σ^2.

2.5 Standardabweichung

Wählen Sie den Reiter „Standardabweichungen“ in der Grafik, Simulationen wie in 2.1.

Beobachten Sie:

- Obere Grafik: Die Form der Verteilung der Standardabweichungen ist eine schiefe Verteilung, sie ist aber symmetrischer als die Verteilung der Varianzen. Aber auch hier wird die Verteilung mit zunehmendem n schmäler und symmetrischer. Bei einer großen Stichprobe streut die Standardabweichung weniger als bei einer kleinen Stichprobe.
- Die untere Grafik zeigt wie in 2.3 beschrieben jeweils den Mittelwert über die Standardabweichungen aller Stichproben bis zur betrachteten Stelle. Auch hier verändert sich der Mittelwert immer weniger. Im Gegensatz zu 2.3 nähert er sich aber nicht der vorgegebenen Standardabweichung σ, sondern dem zu kleinen Wert $a_n \cdot \sigma$. Die Abweichung von σ ist umso größer, je kleiner n ist. Die Standardabweichung ist **kein** erwartungstreuer Schätzwert für σ. Bei der Mittelung von Standardabweichungen wirken sich große Werte weniger aus als bei der Varianz, dadurch erhält man im Mittel einen um den Faktor a_n zu kleinen Wert.