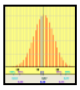
Übungen mit dem Applet

„Binomialverteilung – Vertrauensbereich für den Anteil“

1. Statistischer Hintergrund und Darstellung



Bei der Wareneingangsprüfung wird einem großen Los mit Umfang N zufällig eine kleine Stichprobe vom Umfang $n \ll N$ entnommen und untersucht. Auch wenn der Anteil fehlerhafter Teile im Los immer p beträgt, so erhält man in der Stichprobe nicht immer dieselbe Anzahl fehlerhafter Teile x, sie unterliegt der Zufallsstreuung und wird näherungsweise mit der Binomialverteilung beschrieben (gilt nur für $n \ll N$, exakt erhält man die hypergeometrische Verteilung).

Ähnliches gilt bei einer Lotterie, bei der ein Anteil p der Lose gewinnt. Kauft man n Lose, so unterliegt die Anzahl x der gewinnenden Lose in dieser Stichprobe der Zufallsstreuung und wird ebenfalls mit der Binomialverteilung beschrieben (solange n vernachlässigbar klein ist im Vergleich zur Gesamtzahl der Lose in der Lotterie).

Mit dem Applet „Diskrete Verteilungen" können n und p verändert werden, es zeigt dann grafisch die Wahrscheinlichkeit, dass man in der Stichprobe genau x fehlerhafte Teile oder gewinnende Lose oder allgemein Merkmalsträger erhält.

In diesem Applet wird nun die umgekehrte Frage gestellt: In einer Stichprobe vom Umfang n hat man ein Ergebnis x erhalten. Was sagt das aus über den unbekannten Anteil p in der Grundgesamtheit? Der beste Schätzwert für den unbekannten Anteil ist $\hat{p} = x/n$. Da x aber der Zufallsstreuung unterliegt, darf man nicht folgern, dass dies der wahre Anteil ist, da man bei der Stichprobe ja immer wieder andere Ergebnisse erhält, obwohl p fest ist.

Im Startzustand zeigt das Applet die Dichte der Binomialverteilung für n=200 und p=0,5. Die Länge der Balken stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der ein bestimmtes Ergebnis x auftritt. Am wahrscheinlichsten sind x-Werte in der Nähe von np=100. Dieser Wert wird mit einer langen senkrechten Linie markiert und ist mit dem Wert von np beschriftet (hier 100). Ein Zufallszahlengenerator erzeugt einen x-Wert aus dieser Binomialverteilung, d.h. ein Stichprobenergebnis. Der x-Wert wird im 3. Zahlenfeld links angegeben und im Diagramm blau hervorgehoben. Mit G können Sie nun immer wieder neue Stichprobenergebnisse erzeugen. Bei jeder Simulation erhalten Sie einen anderen x-Wert, aber alle liegen in der Nähe von 100.

Aus der Kenntnis der Form der Verteilung (hier Binomialverteilung mit n=200) kann man nun umgekehrt einen Bereich von p-Werten berechnen, der mit dem beobachteten

Ergebnis x konsistent ist. Dazu muss zunächst ein Vertrauensniveau $1-\alpha$ festgelegt werden (üblich sind 95% und 99%). Zu diesem Vertrauensniveau kann man aus n und x dann eine Untergrenze p_{un} und eine Obergrenze p_{ob} für p berechnen:

$$p_{un} = \frac{x}{x + (n-x+1) \cdot F_{f_1;f_2;1-\alpha/2}} \qquad \text{mit } f_1 = 2\cdot(n-x+1)\,; \qquad f_2 = 2\cdot x$$

$$p_{ob} = \frac{(x+1)\cdot F_{f_1';f_2';1-\alpha/2}}{n-x+(x+1)\cdot F_{f_1';f_2';1-\alpha/2}} \qquad \text{mit } f_1' = 2\cdot(x+1)\,; \qquad f_2' = 2\cdot(n-x)$$

wobei $F_{f_1;f_2;1-\alpha/2}$ Quantile der F-Verteilung sind (vgl. Applet "Stetige Verteilungen").

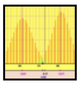
Die so berechneten Grenzen des 95%- und des 99%-Vertrauensbereichs werden an der untersten Achse dargestellt (in lila und hellblau). Zum Vergleich wird auch der beste Schätzwert x/n in dunkelblau und der wahre (aber normalerweise unbekannte) Wert p in schwarz markiert.

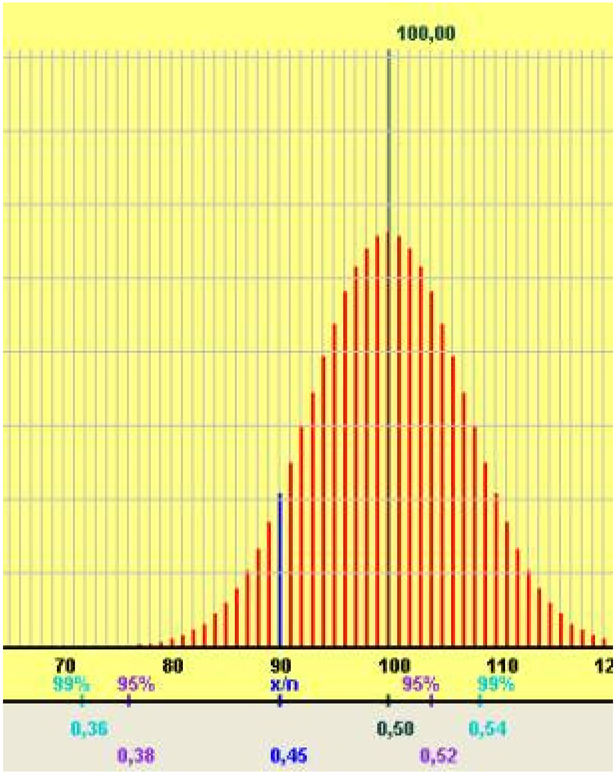
Aus jeder Stichprobe erhält man einen anderen Wert für x und damit einen anderen Vertrauensbereich, aber 95% der mit dieser Formel berechneten 95%-Vertrauensbereiche enthalten den wahren Anteil p (bzw. 99% der 99%-Vertrauensbereiche).

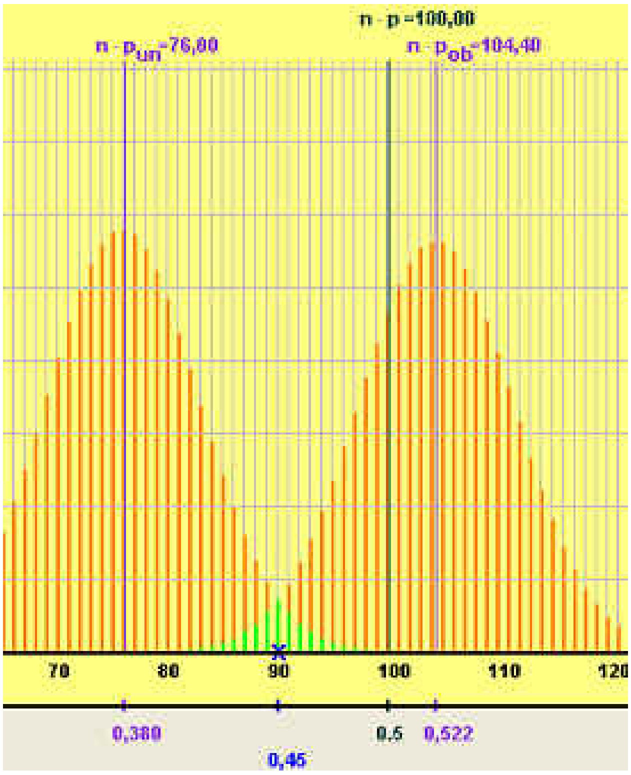
Mit dem Applet können Sie den Stichprobenumfang n und den Anteil p der Merkmalsträger in der Grundgesamtheit verändern, die Verteilung wird als Kurve dargestellt. Aus dieser Grundgesamtheit wird dann eine Stichprobe gezogen, das Ergebnis x wird mit dem 95%- und dem 99%-Vertrauensbereich dargestellt. Die grafischen Darstellungen sollen zeigen:

- die Stichprobenergebnisse x streuen,
- aus jeder Stichprobe erhält man einen anderen Vertrauensbereich, aber 95% der 95%-Vertrauensbereiche enthalten den wahren Anteil p,
- die 99%-Vertrauensbereiche sind immer breiter als die 95%-Vertrauensbereiche,
- je größer der Stichprobenumfang n, desto schmäler sind die Vertrauensbereiche,
- bei p=0,5 ist die Verteilung und damit der Vertrauensbereich besonders breit; je näher p bei 0 bzw. 1 liegt, desto schmäler werden beide.

2. Wie entsteht der Vertrauensbereich?

Wählen Sie dazu für ein beliebiges n, p und Stichprobenergebnis x die 2. Darstellung  aus. Sie sehen nun zwei Binomialverteilungen für denselben Wert n (der ist ja vorgegeben und bekannt).





Bei der unteren dieser Verteilungen ist p jedoch so niedrig gewählt, dass der beobachtete Wert x (blaues Kreuz) am **oberen** Ende der Verteilung liegt, aber gerade noch konsistent mit ihr ist. In der Grundeinstellung 95% ist die grün markierte Wahrscheinlichkeit dafür, dass x oder ein noch höherer Wert auftritt 2,5%. Dieser Grenzwert ist das vorher berechnete p_{un}.

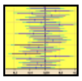
Bei der oberen dieser Verteilungen ist p nun so hoch gewählt, dass der beobachtete Wert x (blaues Kreuz) am **unteren** Ende der Verteilung liegt, aber gerade noch konsistent mit ihr ist. In der Grundeinstellung 95% ist die grün markierte Wahrscheinlichkeit dafür, dass x oder ein noch niedrigerer Wert auftritt 2,5%. Dieser Grenzwert ist das vorher berechnete p_{ob}.

In der linken Spalte sind die Freiheitsgrade f_1 und f_2, sowie die zugehörigen F- und p-Werte gemäß der Formel in Abschnitt 1 angegeben.

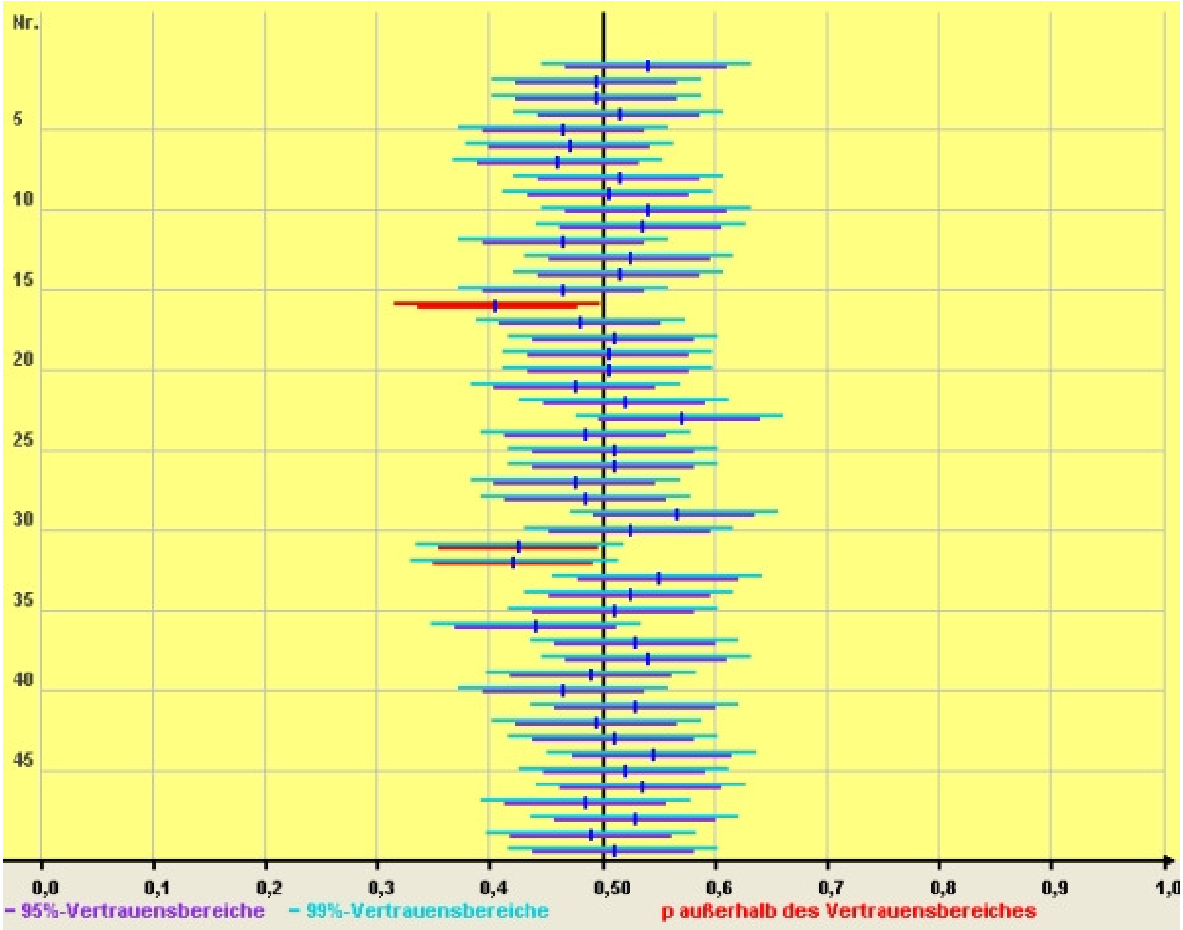
Schalten Sie das Vertrauensniveau nun auf 99% um. Die grünen Flächen dürfen nun nur noch je 0,5% betragen, dazu müssen extremere p-Werte gewählt werden, die Verteilungen rutschen weiter auseinander, der 99%-Vertrauensbereich ist breiter als der 95%-Vertrauensbereich.

Die Formel in Abschnitt 1 setzt einfach die hier dargestellten geometrischen Überlegungen rechnerisch um.

3. Interpretation des Vertrauensbereichs

Wählen Sie dazu die 3. Darstellung  aus. Sie sehen nun 50 Simulationsergebnisse x aus derselben Binomialverteilung für denselben Wert n (der ist ja vorgegeben und bekannt). Für jede Simulation erhalten Sie einen anderen Wert x (=Zufallsstreuung, vgl. die Liste links des Bildes) und damit auch einen anderen Vertrauensbereich. Aber 95% der 95%-Vertrauensbereiche für p enthalten im Mittel den wahren Wert p, 5% enthalten ihn nicht und sind dann rot markiert. Die tatsächliche Anzahl der Markierungen ist unterschiedlich, aber meist sind es zwischen 0 und 6 der insgesamt 50 (auch diese Anzahl genügt der Binomialverteilung mit n=50 und p=0,05). Wiederholen Sie die Simulation mit G und beobachten Sie, wie sich die Anzahl ändert. Gemittelt über viele Simulationen sind es np=2,5 oder p=5%. Analog enthalten im Mittel 99% der 99%-Vertrauensbereiche für p den wahren Wert p, 1% enthalten ihn nicht und sind dann rot markiert.

Hochschule Aalen



Wählen Sie nun einen kleinen Wert für p (z.B. p=0,05). Starten Sie die Simulation wieder mehrmals und beobachten Sie

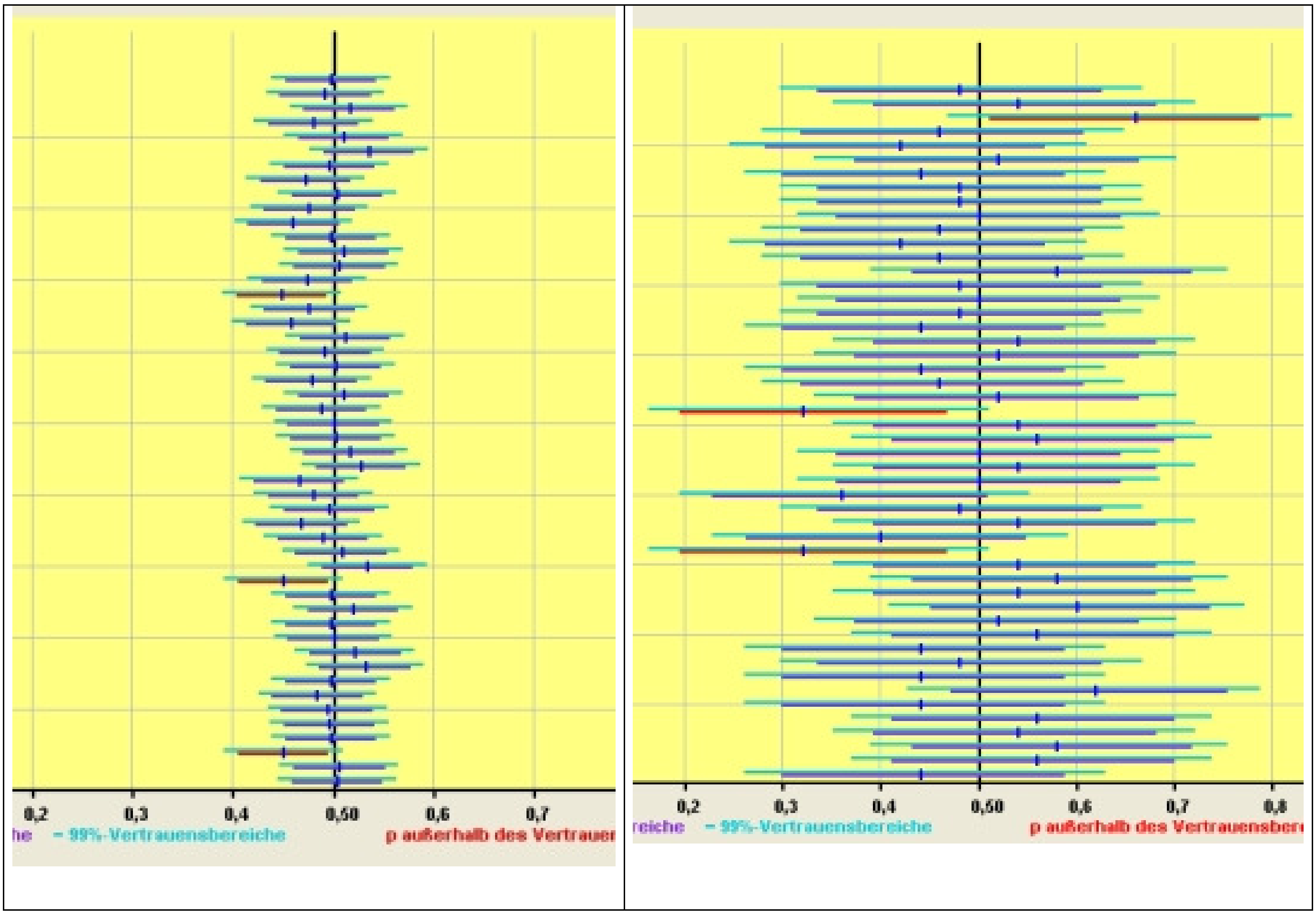
- die Vertrauensbereiche sind schmäler und asymmetrisch, da negative Werte für p nicht möglich sind,
- aber der Anteil rot markierter Bereiche ist unverändert.

Wählen Sie nun einen wesentlich kleineren Wert für den Stichprobenumfang n (z.B. 50). Starten Sie die Simulation wieder mehrmals und beobachten Sie

- die Vertrauensbereiche sind breiter
- aber der Anteil rot markierter Bereiche ist unverändert.

Wählen Sie nun einen wesentlich größeren Wert für den Stichprobenumfang n (z.B. 500). Starten Sie die Simulation wieder mehrmals und beobachten Sie

- die Vertrauensbereiche sind schmäler
- aber der Anteil rot markierter Bereiche ist unverändert.



Hier sieht man, dass die Vertrauensbereiche im linken Schaubild (n= 500) deutlich schmäler sind, als im rechten Schaubild (n=50).

Bei der Berechnung der Vertrauensbereiche geben Sie das Vertrauensniveau vor – das ist der Anteil der Vertrauensbereiche, die auf lange Sicht gesehen (gemittelt über viele Stichproben) den wahren, aber unbekannten Wert p enthalten. Je größer der Stichprobenumfang ist, desto schmäler ist der Bereich.

Der Lohn für großen Aufwand ist also nicht mehr Sicherheit (die geben Sie als Vertrauensniveau vor), sondern ein schmälerer Bereich. Daher kann man auch umgekehrt die Frage stellen: Welchen Stichprobenumfang n muss ich verwenden, um bei einem erwarteten p einen 95%-Vertrauensbereich von ±ε zu erhalten (Näherung für n groß):

$$n \approx 4 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2}$$