Übungen mit dem Applet „Kurven in Polarkoordinaten“

1 Ziele des Applets

Dieses Applet soll verdeutlichen, wie Kurven in Polarkoordinaten zustande kommen.

Bei Kurven in Polarkoordinaten ist der Abstand r eines Punktes als Funktion des Winkels φ zur positiven x-Achse gegeben. Für jeden Wert von φ, für den $r(\varphi)\geq 0$ ist, erhält man so einen Punkt $P(x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi,\ \ y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi)$ in der xy-Ebene. Dies ist eine Parameterdarstellung mit dem Winkel φ als Parameter (vgl. Kurven in Parameterdarstellung).

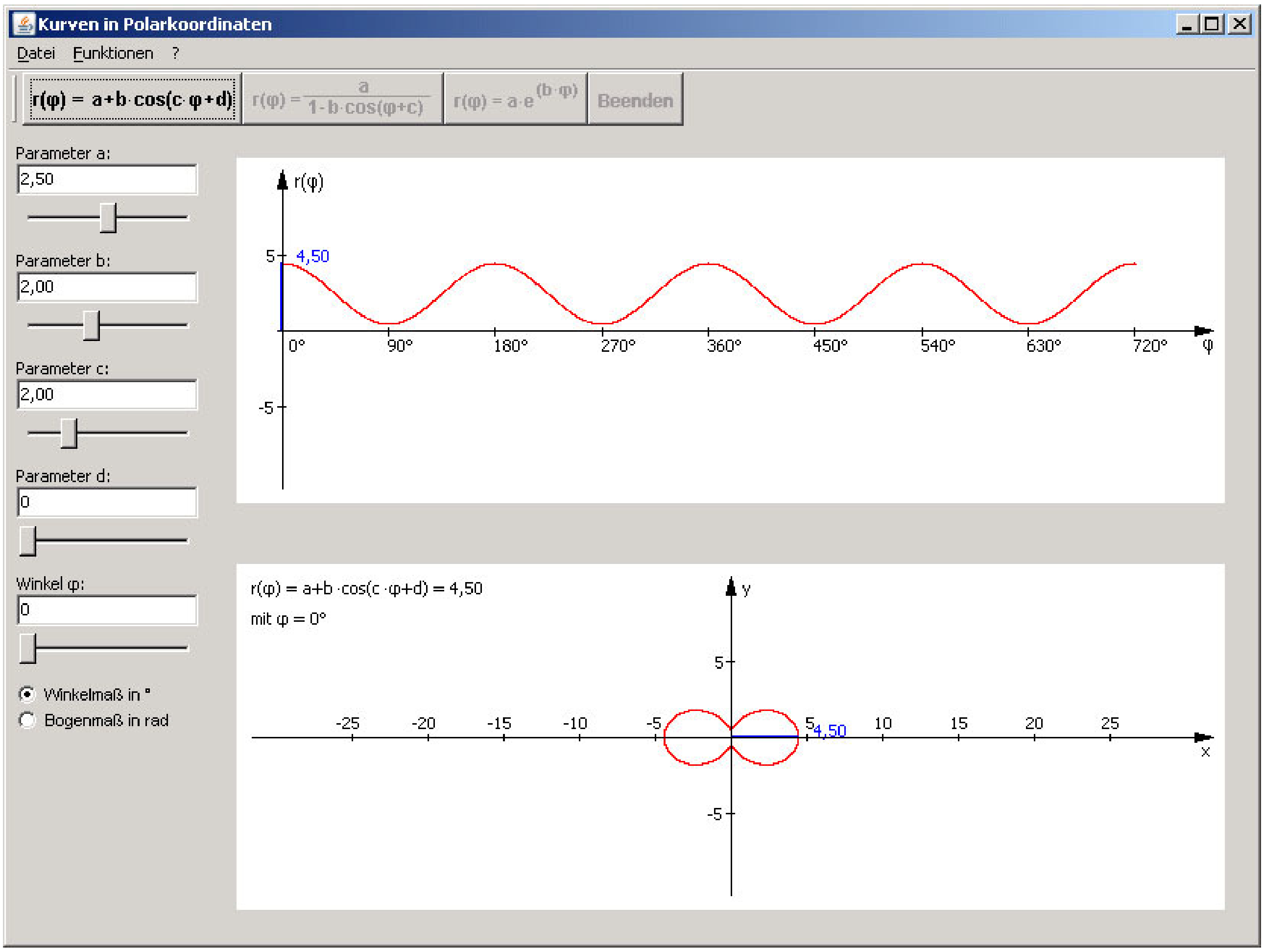
Mit dem Applet können verschiedene Funktionen für $r(\varphi)$ ausgewählt werden. Im oberen von zwei Bildern wird dann diese Funktion dargestellt, im unteren Bild wird die resultierende Kurve in Polarkoordinaten in der xy-Ebene dargestellt. Um den Zusammenhang zwischen den beiden Bildern zu verdeutlichen, kann im oberen Bild ein beliebiger φ-Wert vorgegeben werden. Im oberen Bild wird der zugehörige Wert für $r(\varphi)$ blau eingezeichnet, im unteren Bild wird derselbe Wert für r in die durch φ vorgegebene Richtung aufgetragen.

Verändern Sie nun den φ-Wert und beobachten Sie, wie der ausgewählte Punkt im unteren Bild die Kurve durchläuft. So entsteht Punkt um Punkt die Kurve in Polarkoordinaten.

Um den Zusammenhang zwischen $r(\varphi)$ einerseits und der Kurve in Polarkoordinaten andererseits noch weiter zu verdeutlichen, können auch die Funktionen $r(\varphi)$ selbst mit Schiebern verändert werden. Das untere Bild zeigt dann live, wie sich dadurch die Kurve in Polarkoordinaten verändert.

2 Wie entsteht eine Kurve in Polarkoordinaten?

Starten Sie das Applet. Im oberen Bild zeigt es $r(\varphi) = 2{,}5 + 2\cos(2\varphi)$ – eine um 2,5 nach oben verschobene Cosinus-Schwingung mit Amplitude 2 und Frequenz 2. Bei $\varphi=0$ ist blau der zugehörige Funktionswert $r(0) = 2{,}5 + 2\cos(0) = 4{,}5$ eingezeichnet. Das untere Bild zeigt die entstehende Kurve in Polarkoordinaten. In Richtung 0° zur positiven x-Achse, d.h. in Richtung der x-Achse, ist blau der Abstand 4,5 aus dem oberen Bild eingetragen.



Verschieben Sie nun φ (mit dem φ-Schieber unten links oder direkt im oberen Bild) und beobachten Sie, wie der markierte Punkt im unteren Bild die Kurve durchläuft. Die rote Kurve zeigt den gesamten Verlauf.

3 Kurvenverlauf für ausgewählte r(φ)

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die im oberen Fenster darstellbaren Funktionen, einschließlich der interaktiv mit Schiebern veränderbaren Parameter. Wählen Sie die gewünschte Funktion aus, verändern Sie die Parameter und erleben Sie ihre Wirkung!

3.1 $r(\varphi) = a + b \cdot \cos(c \cdot \varphi + d)$

Der Cosinus ist periodisch mit Periode 2π/c bzw. 360°/c.

- a verschiebt r(φ) im oberen Bild parallel in y-Richtung. r-Werte zwischen a-b und a+b treten auf. Solange a>b ist, ist r immer positiv. Mit den Startwerten c=2 und d=0 tritt der maximale r-Wert von a+b in die positive und negative x-Richtung (φ=0° bzw. 180°), der minimale r-Wert von a-b in die positive und negative y-Richtung (φ=90° bzw. 270°) auf. Für a<b treten auch negative r-Werte auf. Da ein negativer Abstand r vom Ursprung jedoch nicht definiert ist, heißt dies, dass in diesen Winkelbereichen im unteren Bild keine Punkte eingezeichnet sind. Der kleinste r-Wert ist immer 0, und dies ist der Ursprung, unabhängig von φ.

- b verändert die Amplitude der Schwingung im oberen Bild – und wirkt wie bereits beschrieben.

- c verändert die Periode bzw. die Frequenz der Schwingung im oberen Bild. Bei ganzzahligen Werten (c = 1, 2, 3, …) erhält man im unteren Bild eine geschlossene Kurve mit c Punkten maximalen Abstands vom Ursprung. Bei anderen Werten von c ist die Kurve nach einem Durchlauf von 0° bis 360° nicht geschlossen. Im Bild werden zwei Durchläufe dargestellt – wegen der Periodizität schließt sich z.B. bei c=1,5 die Kurve nach zwei Durchläufen.

- d verändert im oberen Bild die Phase um d/c, im unteren Bild bewirkt es eine Drehung im Uhrzeigersinn um den angegebenen Winkel.

Sonderfälle:

a=b, c=1 und d=0 ergibt die Kardioide oder Herzkurve – testen Sie, warum die Kurve so heißt.

a=0, c=1 und d=0 ergibt einen Kreis mit Radius b/2 und Mittelpunkt x_M=b/2; y_M=0 – andere Werte für d drehen den Mittelpunkt um d im Uhrzeigersinn.

a=0, c=2 und d=0 ergibt eine liegende "Acht", c=3 ein Kleeblatt, c=4 ein vierblättriges Kleeblatt.

3.2 $r(\varphi) = \dfrac{a}{1 - b \cdot \cos(\varphi + c)}$ (Kegelschnitte)

- a>0 ist ein Skalenparameter und verändert nur die Größe, nicht aber die Form der Kurve im unteren Bild.
- b verändert die Form der Kurve im unteren Bild.
  Mit dem Startwert b=0 erhält man einen Kreis mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung (im oberen Bild ist r=a, unabhängig von φ).
  Für 0<b<1 erhält man eine Ellipse, von der ein Brennpunkt im Ursprung liegt. b ist die numerische Exzentrizität.
  Für b=1 erhält man eine Parabel mit Brennpunkt im Ursprung.
  Für b>1 erhält man den rechten Ast einer Hyperbel mit Brennpunkt im Ursprung.
- c verändert im oberen Bild die Phase, im unteren Bild bewirkt es eine Drehung im Uhrzeigersinn um den angegebenen Winkel.

Wenn b<1 ist, wird der Nenner in r(φ) nie 0, d.h. r(φ) ist immer endlich und für alle φ definiert – die Kurve umschließt den Ursprung in alle Richtungen.

Wenn b=1 ist, ist r(φ) für φ= -c nicht definiert, r ist nicht beschränkt.

Wenn b>1 ist, ist r ebenfalls nicht beschränkt und es gibt einen Winkelbereich, in dem r(φ)<0 – dieser Winkelbereich wird vom betrachteten Hyperbel-Ast nicht erreicht.

3.3 $r(\varphi) = a \cdot e^{b \cdot \varphi}$ (logarithmische Spirale)

- a>0 verändert den Maßstab.
- b>0 bewirkt, dass r(φ) exponentiell zunimmt – die Spirale geht nach außen.
  b<0 bewirkt, dass r(φ) exponentiell abnimmt – die Spirale geht nach innen, $r \to 0$,

wenn $\varphi \rightarrow \infty$.

Für b=0 erhält man einen Kreis, da r dann nicht von φ abhängt.

4 Ableitung von Kurven in Polarkoordinaten

Die Ableitung ist die Steigung der Tangente im betrachteten Punkt (vgl. Applet "Grundfunktionen und ihre Ableitung"). Für Kurven in Polarkoordinaten muss man unterscheiden zwischen Ableitungen nach dem Winkel und Ableitungen nach x.

- $\dot{r} = \dfrac{dr}{d\varphi}$ ist die Steigung von r(φ) im **oberen** Bild an der gewählten Stelle.

- $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ist die Steigung von y(x) im **unteren** Bild an der gewählten Stelle.

Es gilt:

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos\varphi \;\Rightarrow \dot{x}(\varphi) = \dot{r}(\varphi) \cdot \cos\varphi - r(\varphi) \cdot \sin\varphi$$

$$y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin\varphi \;\Rightarrow \dot{y}(\varphi) = \dot{r}(\varphi) \cdot \sin\varphi + r(\varphi) \cdot \cos\varphi$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)} = \frac{\dot{r}(\varphi) \cdot \sin\varphi + r(\varphi) \cdot \cos\varphi}{\dot{r}(\varphi) \cdot \cos\varphi - r(\varphi) \cdot \sin\varphi}$$