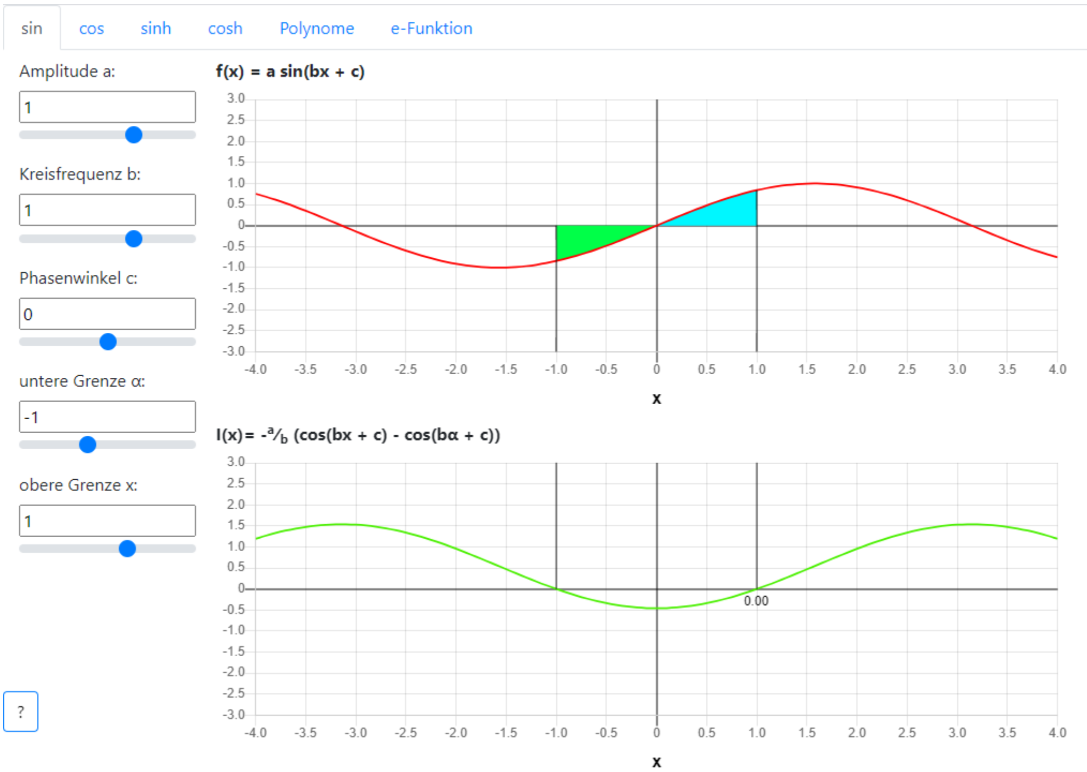
ANLEITUNG ZUR WEB-APP „INTEGRAL“



bearbeitet von:

Johannes Minder

SS 2020

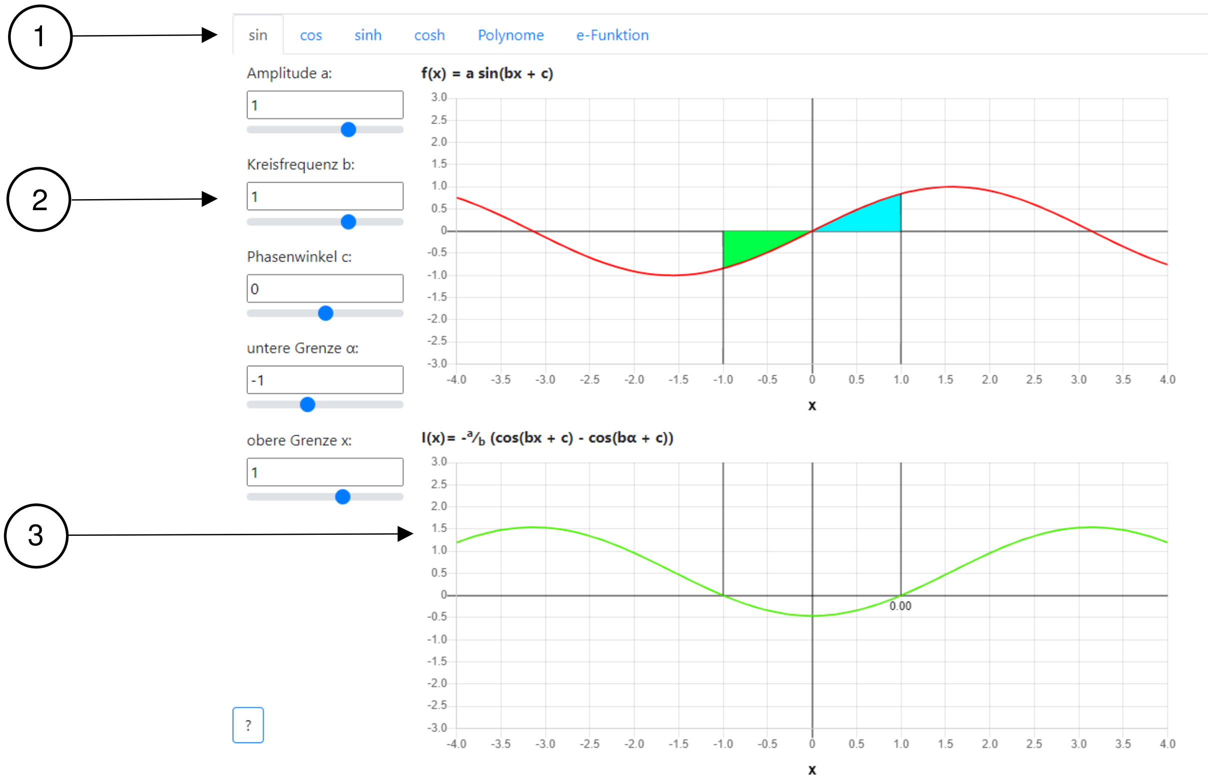
ET/IE-6

betreut von:

Prof. Dr. Wilhelm Kleppmann

Inhaltsverzeichnis

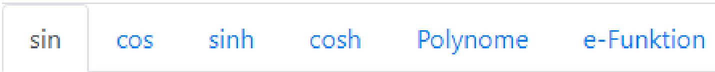
Grafische Benutzeroberfläche



Legende

1 Toolbar:	Ermöglicht das direkte Anwählen der Funktionen.
2 Parametereingabe:	Änderung der Parameter über Texteingabefelder oder über die Schieberegler.
3 Anzeigebereich:	stellt die Grundfunktionen sowie deren Integrale, Unter- und Obergrenzen, Integralwerte, Funktionswerte und Integrationsbereiche dar.

Toolbar



Die Toolbar ermöglicht es dem Benutzer, mit einem einfachen Mausklick die dargestellte Funktion zu wählen. Die Funktion, welche gerade aktiv ist, wird. Standardmäßig wird die Webapp mit der Sinus-Funktion gestartet.

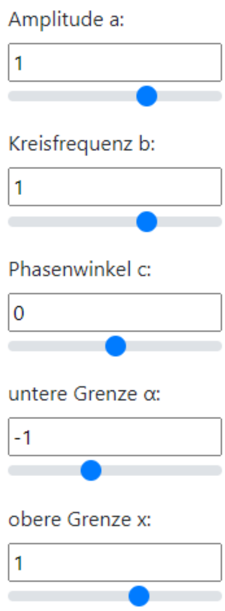
Parametereingabe

Im Parametereingabebereich hat der Anwender Zugriff auf alle Funktionsparameter sowie auch auf die Werte der Unter- bzw. Obergrenze. Die Änderung der Parameter hat eine sofortige Wirkung auf die Funktionen in den Zeichenbereichen. Das Verändern der Parameter erfolgt entweder durch eine direkte Eingabe der Werte über die Tastatur in das Textfeld (mit „Enter" bestätigen), oder durch das Verschieben der Schieberegler mit der Maus. Ein erneuter Funktionsaufruf, sei es über die Toolbar, die Tastenkürzel oder das Menü, setzt alle Werte der Funktion auf Standardwerte zurück.

Sinus und Cosinus

Sinus-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$

Cosinus-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$

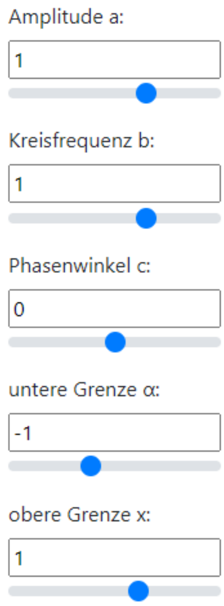


Bei Sinus und Cosinus –Funktionen kann der Benutzer die Werte der Amplitude a, der Kreisfrequenz b, des Phasenwinkels c und der Grenzen des Integrals verändern. Amplitude a und Kreisfrequenz b haben ein Intervall von -3,00 bis +3,00, der Phasenwinkel c hat ein Intervall von -10,00 bis +10,00. Als Grenzen des Integrals sind Werte von -4,00 bis +4,00 möglich.

Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus

Sinus-hyperbolicus-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \sinh(bx + c)$

Cosinus- hyperbolicus-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \cosh(bx + c)$



Bei Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus –Funktionen kann der Benutzer die Werte der Parameter a, b und c und der Grenzen des Integrals verändern. Für die Parameter a und b sind Werte von -3,00 bis +3,00 und für c von -5,00 bis +5,00 möglich. Als Grenzen des Integrals sind Werte von -4,00 bis +4,00 möglich.

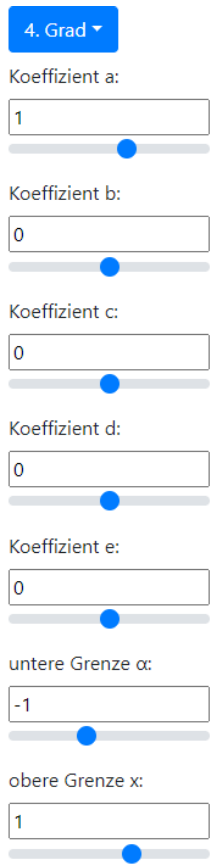
Polynome

1. Grad $y = f(x) = ax + b$

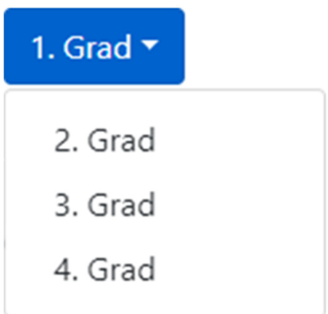
2. Grad $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

3. Grad $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grad $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$



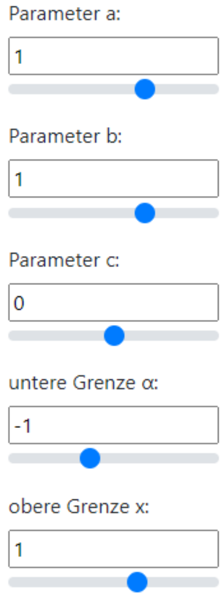
Bei Polynom-Funktionen kann der Benutzer per Drop-Down-Menü den Grad vom 1. bis zum 4. Grad einstellen. Je nach gewähltem Grad können dann die Koeffizienten a und b, ggf. auch c, d, e und die Grenzen des Integrals verändert werden.



Die Parameter haben mögliche Werte von -5,00 bis +5,00. Als Grenzen des Integrals sind Werte von -4,00 bis +4,00 möglich. Nicht relevante Koeffizienten werden auch nicht dargestellt.

e-Funktion

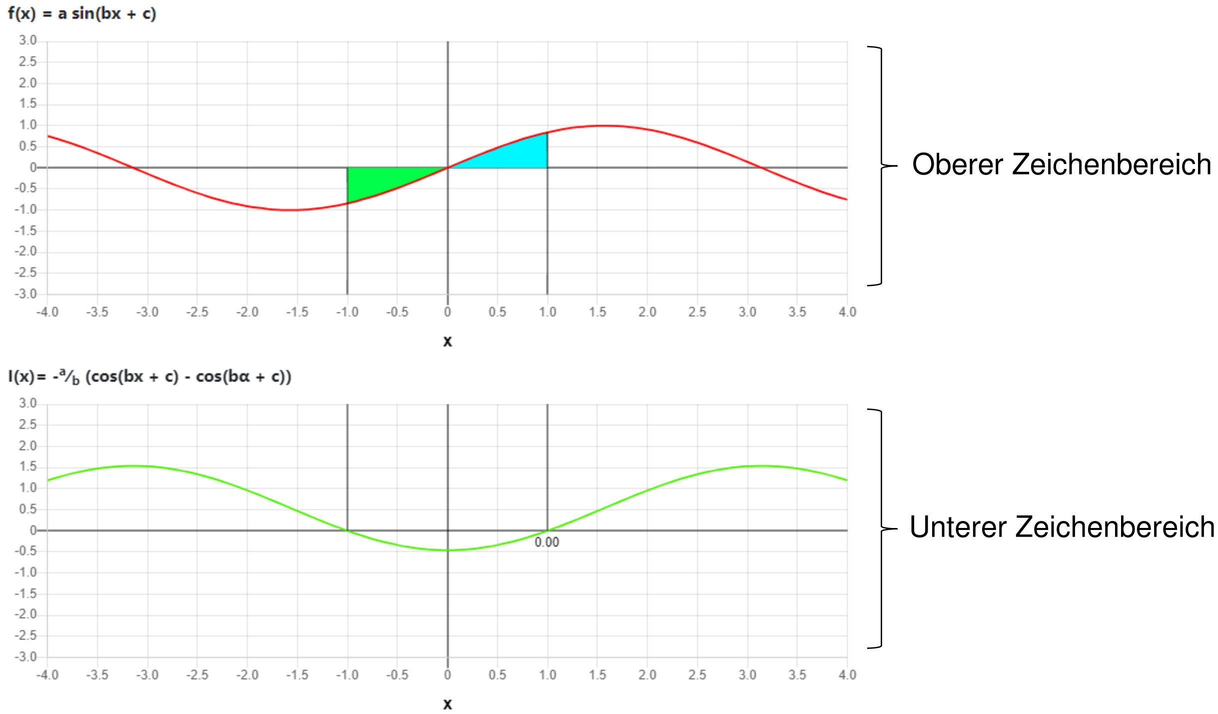
Exponential-Funktion: $y = f(x) = a \cdot e^{bx+c}$



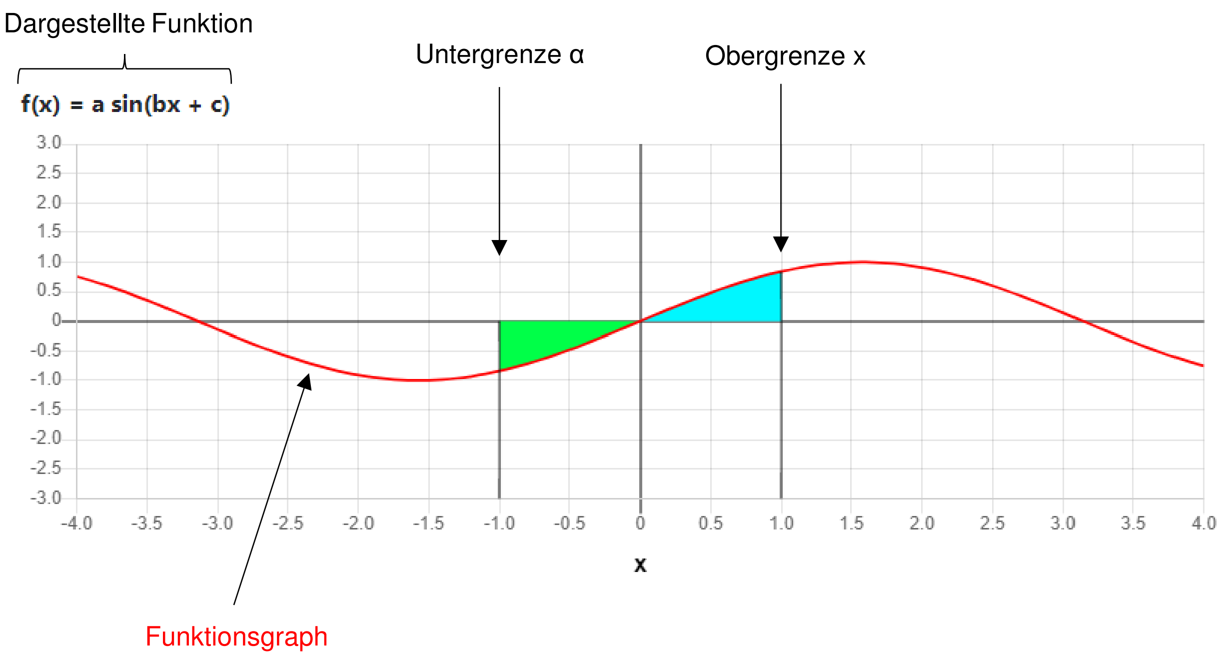
Bei der e–Funktion kann der Benutzer die Werte der Parameter a und b von -3,00 bis +3,00 verändern, c von -5,00 bis +5,00. Als Grenzen des Integrals sind Werte von -4,00 bis +4,00 möglich.

Anzeigebereich

Der Anzeigebereich gliedert sich in zwei Zeichenbereiche.

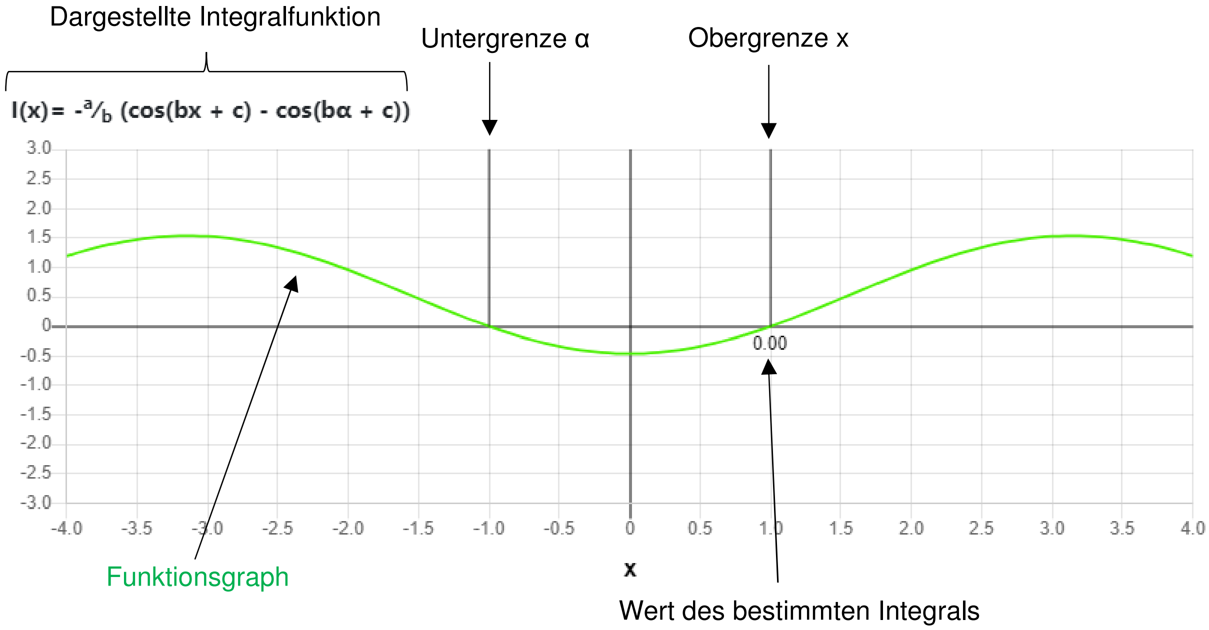


Oberer Zeichenbereich



In diesem Zeichenbereich wird die zu integrierende Funktion gezeichnet. Oben links befindet sich die Gleichung der Funktion, die dargestellt wird. Der Funktionsgraph wird in roter Farbe abgebildet. Der Bereich, über den integriert werden soll, befindet sich zwischen der Untergrenze α und der Obergrenze x. Flächen oberhalb der x-Achse werden in blauer Farbe gefüllt, Flächen unterhalb der x-Achse in grüner Farbe. Die Grenzen des zu integrierenden Bereichs sind grau und werden bis zum Funktionsgraph oder bis zur x-Achse gezeichnet.

Unterer Zeichenbereich



Im unteren Zeichenbereich ist die zugehörige Integralfunktion dargestellt. Wie im oberen Zeichenbereich ist oben links die Gleichung abgebildet, daneben ist in Grün der Funktionsgraph der Integralfunktion gezeichnet. Der Funktionsgraph wird nach oben bzw. nach unten verschoben, je nach Position der Untergrenze. Neben der Obergrenze steht immer der Wert des bestimmten Integrals von a bis b (grau).

Überblick Übungen Integral

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über wichtige Begriffe der Integralrechnung und erläutert, wie sie visualisiert werden. Der obere Zeichenbereich zeigt jeweils die gewählte Grundfunktion (die Parameter in dieser Grundfunktion sind mit Schiebern veränderbar), der untere Zeichenbereich die Visualisierung der hier beschriebenen Begriffe.

Integralfunktion $I(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x_1)dx_1$

Für $\alpha < x$ stellt das bestimmte Integral die Fläche zwischen der x_1-Achse und der Funktion $f(x_1)$ zwischen $x_1 = \alpha$ und $x_1 = x$ dar. Flächen oberhalb der Achse (im oberen Zeichenbereich blau markiert) zählen dabei als positiv, Flächen unterhalb der Achse (im oberen Zeichenbereich grün markiert) zählen als negativ. Enthält das Intervall $[\alpha, x]$ Bereiche mit positiven und negativen Funktionswerten (d.h. blaue und grüne Flächen), so stellt I(x) die Differenz der beiden Flächen dar (blau – grün). Das bestimmte Integral ist ein Zahlenwert, er wird im unteren Zeichenbereich angegeben.

Für $\alpha = x$ ist die Breite des Intervalls 0 und damit auch die Fläche immer 0, d.h. I(α)=0.

Für $x < \alpha$ drehen sich die Vorzeichen um, auf die Farbmarkierung der Flächen im oberen Zeichenbereich wird verzichtet.

Betrachtet man die Fläche als Funktion der Obergrenze x (für eine feste Untergrenze α), so erhält man die im unteren Zeichenbereich dargestellte Kurve. Sie wird als Integralfunktion oder Flächenfunktion bezeichnet.

Es gilt immer I(α)=0, d.h. die Integralfunktion schneidet oder berührt die x-Achse immer bei $x = \alpha$. Eine Veränderung der Untergrenze α verschiebt I(x) parallel zur y-Achse. Die Form bleibt unverändert, es wird nur eine Konstante addiert.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Ableitung der Integralfunktion ist die Ausgangsfunktion:

$$\frac{d}{dx}I(x) = f(x)$$

In diesem Sinn ist die Integration die Umkehrung der Differentiation. Verwenden Sie I(x) als Ausgangsfunktion in der Web-App "Ableitung" und Sie erhalten als Ableitung wieder die Ausgangsfunktion für diese App. Ableitung und Integration heben sich gegenseitig auf.

Jede Funktion F(x), deren Ableitung f(x) ist, heißt Stammfunktion von f(x). Aufgrund des Hauptsatzes ist jede Integralfunktion I(x) auch eine Stammfunktion.

Die Veränderung der Untergrenze α verschiebt I(x) parallel zur y-Achse. Bei manchen Funktionen (z.B. Sinus und Cosinus) treten jedoch nur Verschiebungen in einem bestimmten Bereich auf. Bei der Stammfunktion kümmert man sich nicht darum, ob eine bestimmte Verschiebung tatsächlich auftreten kann oder nicht, jede Verschiebung ist möglich.

Es gilt:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

wobei F(x) irgendeine Stammfunktion von f(x) ist und C alle reellen Werte durchläuft (unbestimmtes Integral, keine Grenzen sind vorgegeben).

Übungen

Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist ungerade, die zugehörige Integralfunktion gerade (Cosinus). Bei der Voreinstellung Untergrenze $\alpha=-1$ und Obergrenze $x=1$ sind grüne und blaue Flächen gleich groß, daher ist $I(1)=0$. Verschieben Sie nun α auf 0, $I(x)$ wird in y-Richtung verschoben, so dass nun $I(0)=0$. Es gilt: $I(x)=-\cos(x)+1$. Verschieben Sie nun x auf $\pi\cong3{,}14$. $I(\pi)=2$.

Verschieben Sie nun α auf $-\pi/2\cong-1{,}57$: $I(x)$ wird in y-Richtung verschoben, so dass nun $I(-\pi/2)=0$. Es gilt: $I(x)=-\cos(x)$. $I(\pi)=1$. Die grüne Fläche kompensiert die Hälfte der blauen Fläche, das obige Ergebnis wird halbiert.

Verschieben Sie nun α auf $-\pi\cong-3{,}14$: $I(x)$ wird in y-Richtung verschoben, so dass nun $I(-\pi)=0$. Es gilt: $I(x)= -\cos(x)-1$. $I(\pi)=0$. Die grüne Fläche kompensiert wieder die gesamte blaue Fläche.

Verschieben Sie α nun kontinuierlich und beobachten Sie, wie $I(x)$ zwischen den obigen Extremen hin und her wandert, den dargestellten Bereich aber nicht verlässt. Es gilt immer $I(\alpha)=0$. Die Ableitung von $I(x)$ ist immer $\sin(x)$, also die Ausgangsfunktion.

Jede Funktion der Form $-\cos(x)+C$ ist eine Stammfunktion von $\sin(x)$, aber nur C-Werte zwischen -1 und $+1$ treten als Integralfunktion auf.

Cosinusfunktion

Die Cosinusfunktion ist gerade, die zugehörige Integralfunktion ungerade (Sinus). Wiederholen Sie die bei der Sinusfunktion beschriebenen Verschiebungen und beobachten Sie, dass $I(x)$ zwischen $\sin(x)-1$ und $\sin(x)+1$ liegt. Die Ableitung von $I(x)$ ist immer $\cos(x)$, also die Ausgangsfunktion.

Hyperbolicus-Funktionen

Ähnliche Beobachtungen wie bei den Winkelfunktionen sind möglich. Der Wertebereich der Ausgangsfunktionen und Integralfunktionen ist aber nicht begrenzt.

Polynome

Ähnliche Beobachtungen sind möglich. Bei Polynomen 1. Grades (Geraden) sind die auftretenden Flächen Dreiecke bzw. Trapeze, so dass die Flächen alternativ mit Hilfe elementarer Geometrie berechnet werden können.

Bedienung der Webapp (Kurzfassung)

Die gewünschte Grundfunktion lässt sich über die Toolbar auswählen. Dadurch wird diese Funktion mit dem bestimmten Parameter geladen. Zur Übersicht welche Parameter welchem Buchstaben zugeordnet sind, wird die Formel im Zeichenbereich gezeigt.

Die Parameter kann der Benutzer im Parametereingabebereich mittels Texteingabefeld oder dem zugehörigen Schieberegler nach seinen Wünschen innerhalb der gegebenen Grenzen setzen. Diese Werte werden sofort auf das Schaubild übertragen, damit die Änderungen direkt erkennbar werden. Ferner kann man bei der Polynomfunktion über ein Drop-Down-Menü den Grad des Polynoms festlegen. Die Grenzen des Integrals können durch das Verändern der Parameterwerte im Parameterbereich oder mittels Drag and Drop Verfahren direkt auf dem Zeichenbereich verändert werden. An der Untergrenze ist das Integral $I(\alpha)=0$, deswegen schneidet dort der Funktionsgraph auch immer die x-Achse. Den Wert des bestimmten Integrals von α bis x kann der Benutzer in der Nähe der Obergrenze ablesen.

.