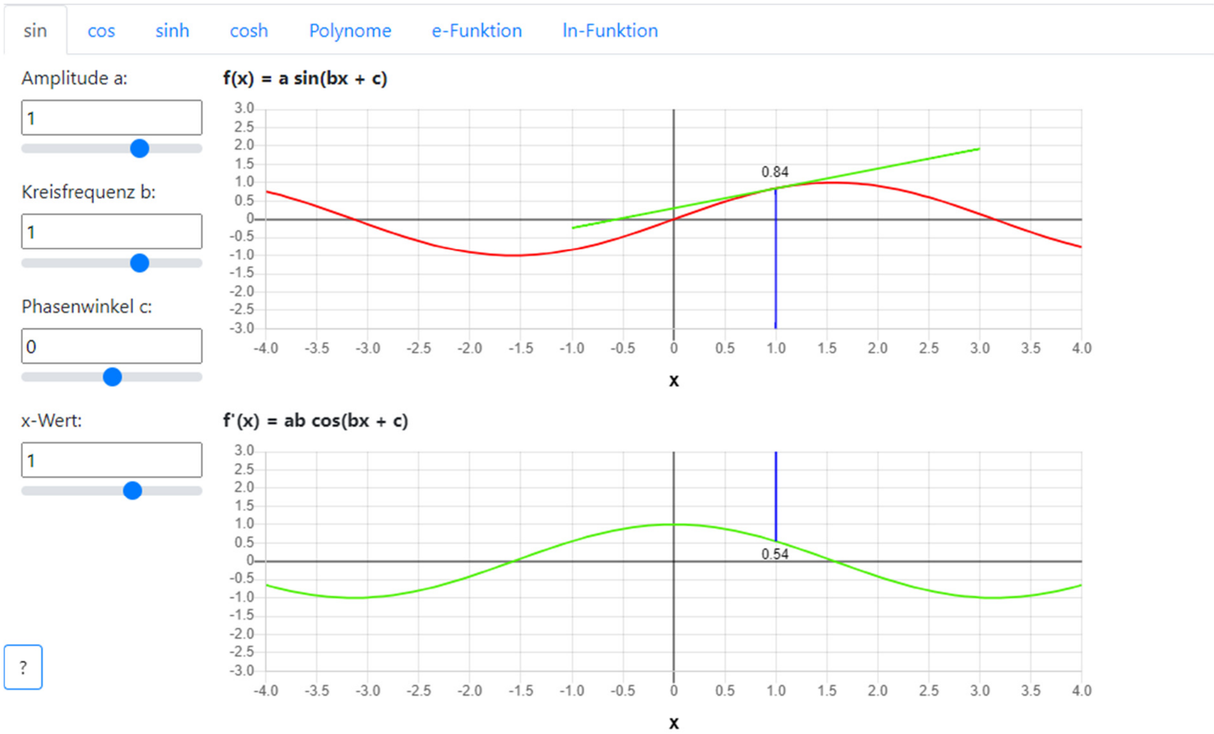
ANLEITUNG ZUR WEB-APP „ABLEITUNG“



bearbeitet von:

Johannes Minder

SS 2020

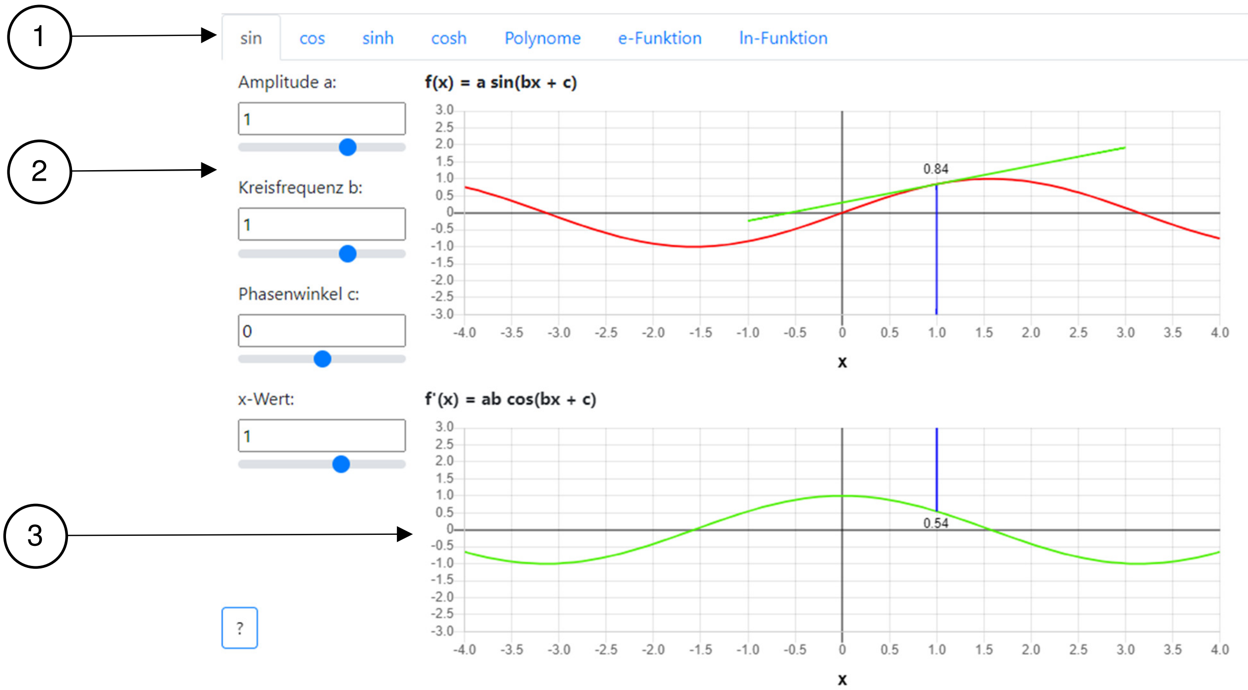
ET/IE-6

betreut von:

Prof. Dr. Wilhelm Kleppmann

Inhaltsverzeichnis

Grafische Benutzeroberfläche



Legende

1 Toolbar:	Ermöglicht das direkte Anwählen der Funktionen.
2 Parametereingabe:	Änderung der Parameter über Texteingabefelder oder über die Schieberegler.
3 Anzeigebereich:	Stellt die Funktion, ihre Ableitung, den x-Wert mit den zugehörigen y-Werten und die Tangente dar.

Toolbar

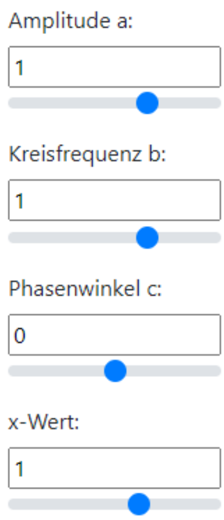
Die Toolbar ermöglicht es dem Benutzer, mit einem einfachen Mausklick die dargestellte Funktion zu wählen. Die Funktion, welche gerade aktiv ist, wird hervorgehoben. Standardmäßig wird die Webapp mit der Sinus-Funktion gestartet.

Parametereingabe

Im Bereich der Parametereingabe kann der Benutzer die Parameter der aktuellen Funktion verändern. Zusätzlich kann der x-Wert variiert werden. Die Anzeige der Funktion reagiert sofort auf die neuen Werte.

Grundsätzlich bestehen zwei Möglichkeiten auf die Parameter zuzugreifen. Entweder man ändert den Wert, indem man den Schieberegler benutzt, oder man gibt eine Zahl in das Textfeld ein und bestätigt dies mit der Taste Enter.

Sinus und Cosinus



Sinus-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$

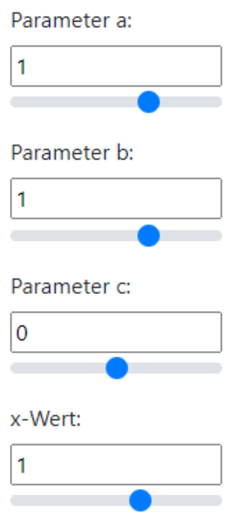
Cosinus-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$

Bei der Sinus-Funktion und der Cosinus-Funktion hat der Benutzer die Möglichkeit die Werte der Amplitude a, die Kreisfrequenz b, den Phasenwinkel c und den x-Wert zu beeinflussen. Die Wertebereiche der Amplitude und der Kreisfrequenz umfassen -3,00 bis +3,00, die des Phasenwinkels -10,00 bis +10,00 und der x-Wert -4,00 bis +4,00.

Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus

Sinus-hyperbolicus-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \sinh(bx + c)$

Cosinus- hyperbolicus-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \cosh(bx + c)$



Bei der Sinus-hyperbolicus-Funktion und der Cosinus-hyperbolicus-Funktion hat der Benutzer die Möglichkeit die Werte des Parameters a und des Parameters b innerhalb der Grenzen von -3,00 bis +3,00, den Parameter c von -5,00 bis +5,00 und den x-Wert von -4,00 bis +4,00 zu wählen.

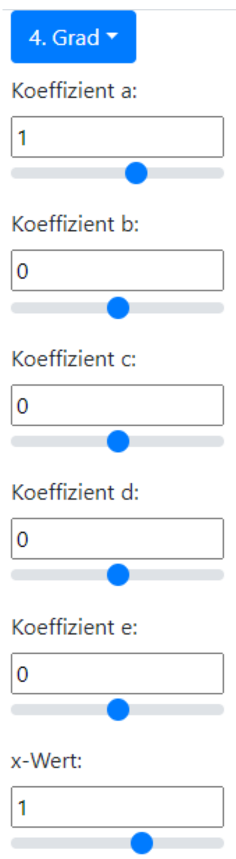
Polynome

1. Grad $y = f(x) = ax + b$

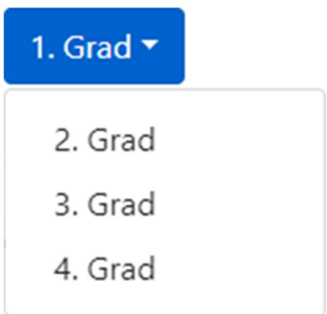
2. Grad $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

3. Grad $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

4. Grad $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$



Bei den Polynomfunktionen sind die Grade 1 bis 4 implementiert. Den gewünschten Grad kann man mittels eines Drop-Down-Menüs einstellen. Die nicht benötigten Polynomkoeffizienten bei den kleineren Graden werden aus dem Eingabefeld ausgeblendet.

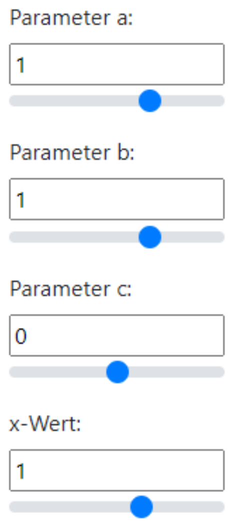


Alle Koeffizienten haben einen Wertebereich von -5,00 bis +5,00. Der x-Wert lässt sich von -4,00 bis +4,00 einstellen.

e-Funktion

Exponential-Funktion: $y = f(x) = a \cdot e^{bx+c}$

Die Exponential-Funktion besitzt drei Parameter, wobei man diese innerhalb der Bereiche von -3,00 bis +3,00 ändern kann. Der x-Wert ist frei wählbar von -4,00 bis +4,00.



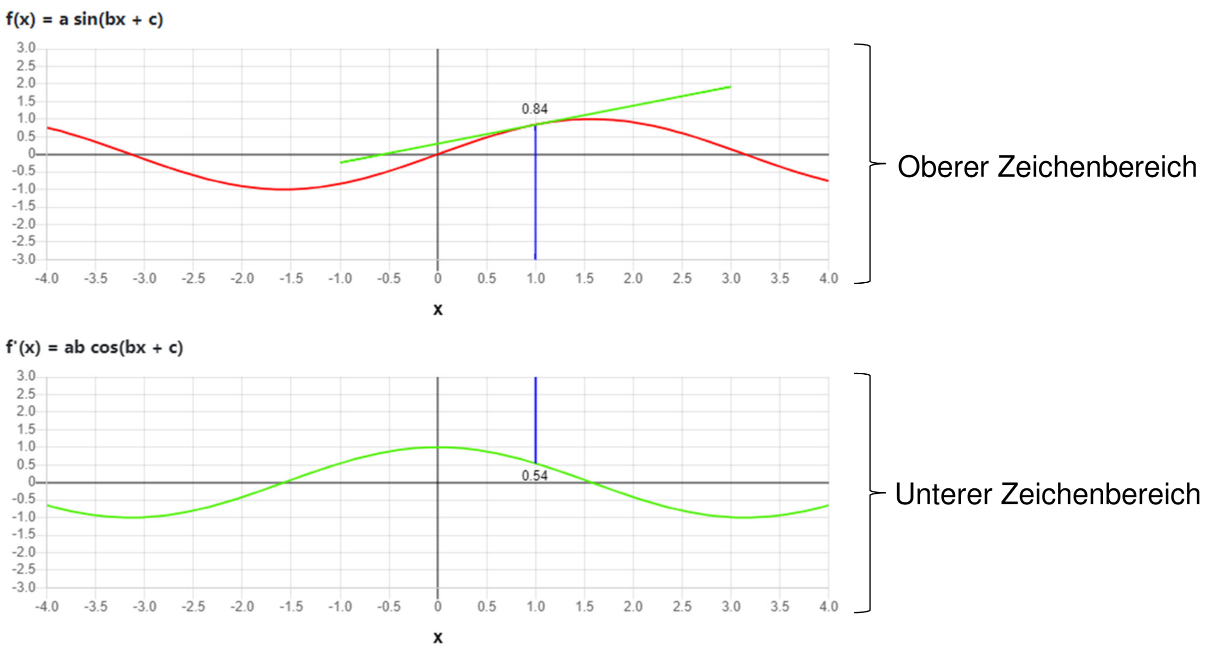
ln-Funktion

Logarithmus-naturalis-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \ln{(bx + c)}$

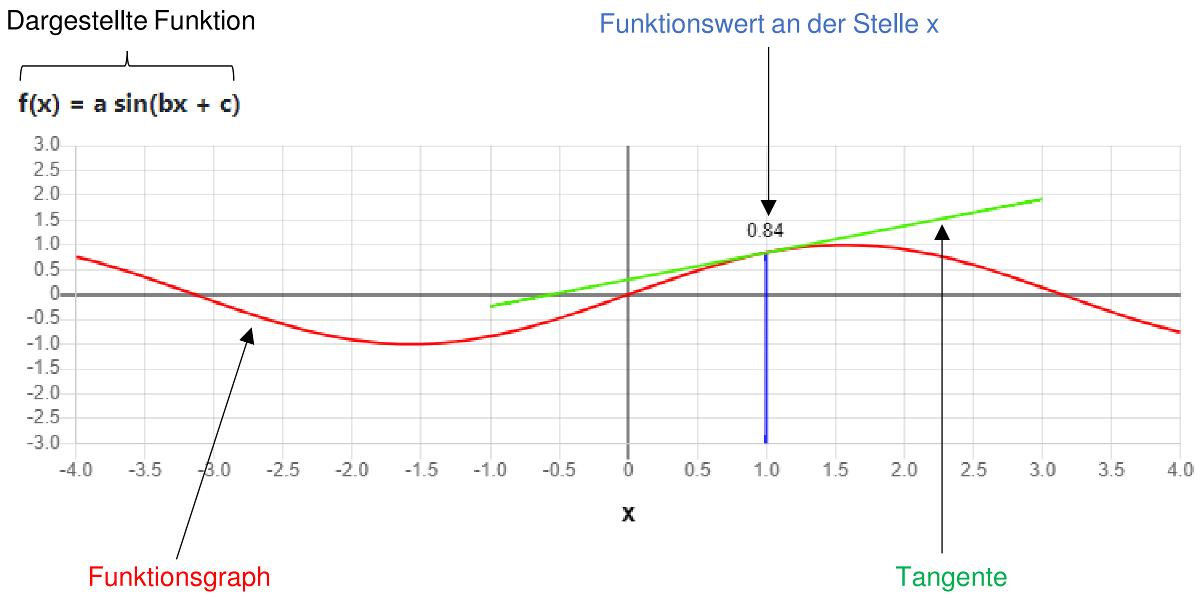
Bei der Logarithmus-naturalis-Funktion sind die Parameter a, b und c im gleichen Wertebereich wie bei der Exponential-Funktion einstellbar. Das gleiche gilt für den x-Wert.

Anzeigebereich

Der Anzeigebereich gliedert sich in zwei Zeichenbereiche.

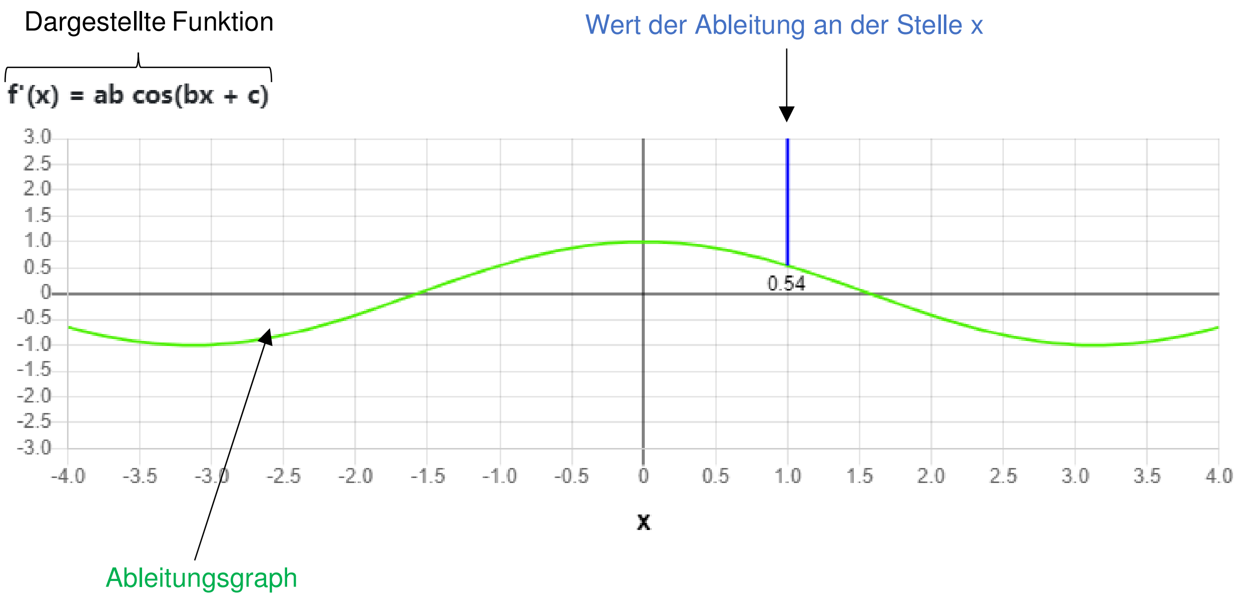


Oberer Zeichenbereich



Der obere Zeichenbereich gibt die grafische Darstellung der gewählten Funktion aus. Die zugehörige Formel wird in der linken, oberen Ecke ausgegeben. Der Graph dieser Funktion wird in der Farbe Rot gezeichnet. Der x-Wert ist der senkrechte blaue Strich an der Stelle, die man bei der Parametereingabe als x-Wert gesetzt hat. Diese Linie endet genau am Schnittpunkt mit der Funktion. Falls die Funktion für diesen x-Wert nicht definiert ist, oder außerhalb des Zeichenbereiches liegt, wird die blaue Linie bis zum oberen Zeichenrand angezeigt. Sofern es einen Schnittpunkt innerhalb des Zeichenbereiches gibt, wird an diesem in Grün eine Tangente angelegt und zusätzlich der zu diesem x-Wert gehörende Funktionswert eingeblendet. Der x-Wert kann auch mit der Maus verschoben werden.

Unterer Zeichenbereich



Im unteren Zeichenbereich wird der Graph der Ableitungsfunktion in Grün dargestellt. Die Gleichung der Ableitungsfunktion wird in der oberen, linken Ecke platziert. Die blaue Linie des x-Wertes wird bis zum Schnittpunkt mit der Ableitung abgebildet. Wenn die x-Wert-Linie die Ableitung im dargestellten Bereich schneidet, wird an dieser Stelle der zugehörige Funktionswert der Ableitung gezeigt. Dies ist die Steigung der Tangente im oberen Zeichenbereich.

Überblick über die Funktionen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die im oberen Fenster darstellbaren Funktionen, einschließlich der interaktiv mit Schiebern veränderbaren Parameter. Wählen Sie die gewünschte Funktion aus, verändern Sie die Parameter und erleben Sie ihre Wirkung!

Sinus-Funktion $y = f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$

Die Sinusfunktion ist periodisch und in der Grundform a=1, b=1 und c=0 (Startwerte) ungerade, d.h. punktsymmetrisch zum Ursprung.

- a verändert die Amplitude, die y-Werte liegen zwischen –a und +a (=Wertebereich).
- b verändert die Frequenz – je größer b, desto größer die Frequenz und desto kleiner die Periode (Periode $\frac{2\pi}{b}$).
- c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung, die verschobene Kurve ist punktsymmetrisch zu $x = \frac{-c}{b}$.

Cosinus-Funktion $y = f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$

Die Cosinusfunktion ist periodisch und in der Grundform a=1, b=1 und c=0 (Startwerte) gerade, d.h. spiegelsymmetrisch zur y-Achse (achsensymmetrisch). Der Cosinus entsteht aus dem Sinus durch Verschiebung um π/2 nach links.

- a verändert die Amplitude, die y-Werte liegen zwischen –a und +a (=Wertebereich).
- b verändert die Frequenz – je größer b, desto größer die Frequenz und desto kleiner die Periode (Periode $\frac{2\pi}{b}$).
- c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung, die verschobene Kurve ist (u.a.) spiegelsymmetrisch zu $x = \frac{-c}{b}$.

Sinus-hyperbolicus-Funktion $y = f(x) = a \cdot \sinh(bx + c)$

Der Sinus hyperbolicus ist nicht periodisch, aber in der Grundform a=1, b=1 und c=0 (Startwerte) ungerade, d.h. punktsymmetrisch zum Ursprung.

- a verändert die Skalierung der y-Werte.
- b verändert die Skalierung der x-Werte.
- c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung, die verschobene Kurve ist punktsymmetrisch zu $x = \frac{-c}{b}$.

Cosinus- hyperbolicus-Funktion $y = f(x) = a \cdot \cosh(bx + c)$

Der Cosinus hyperbolicus ist nicht periodisch, aber in der Grundform a=1, b=1 und c=0 (Startwerte) gerade, d.h. spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

- a verändert die Skalierung der y-Werte.
- b verändert die Skalierung der x-Werte.
- c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung, die verschobene Kurve ist spiegelsymmetrisch zu $x = \frac{-c}{b}$.

Polynome

1. Grad $y = f(x) = ax + b$

Ein Polynom 1. Grades ist eine Gerade mit den Startwerten a=1, b=0.

- a verändert die Steigung der Geraden.
- b verändert den x-Achsenabstand.

Die Gerade schneidet die x-Achse immer, solange die Steigung a nicht 0 ist. Die y-Achse wird ebenfalls immer geschnitten, außer wenn die Steigung unendlich groß ist, dann wäre die Gerade senkrecht (in der Web-App nicht einstellbar).

2. Grad $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Ein Polynom 2. Grades ist eine Parabel. In der Grundform a=1, b=0 und c=0 (Startwerte) und solange b=0 ist, ist sie gerade, d.h. spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

- c verschiebt die Parabel in der y-Richtung.
- a verändert die Steilheit und Öffnung der Parabel (und damit die Skalierung der x-Werte) – für a>0 ist die Parabel nach oben, für a<0 nach unten geöffnet, für kleine |a| ist die Parabel breit, für große |a| schmal
- b verschiebt den Scheitelpunkt der Parabel in x-Richtung – Scheitel und Symmetrieachse liegen bei $x = \frac{-c}{b}$.

Je nach Wahl der Parameter schneidet die Parabel die x-Achse in zwei Punkten (zwei einfache Nullstellen), berührt die x-Achse in einem Punkt (eine doppelte Nullstelle) oder liegt völlig oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse (keine reellen Nullstellen).

3. Grad $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

In der Grundform a=1, b=0, c=0 und d=0 (Startwerte) und solange b=0 und d=0 ist, ist sie ungerade, d.h. punktsymmetrisch zum Ursprung.

- d verschiebt die Kurve in der y-Richtung.
- a verändert die Steilheit der Kurve (und damit die Skalierung der x-Werte) – für a>0 verläuft sie von links unten nach rechts oben, für a<0 von links oben nach rechts unten.
- c lässt den Wendepunkt unverändert, ändert aber die Steigung der Wendetangente – solange d=0 und b=0 ist, bleibt die Symmetrie erhalten. Je nach Vorzeichen von c relativ zu a wird die Kurve gestreckt oder sie "schwingt".
- Solange d=0 und c=0 ist, bleibt eine doppelte Nullstelle im Ursprung, für b<0 wandert aber eine einfache Nullstelle zu immer größeren x-Werten (x>0) , für b>0 wandert aber eine einfache Nullstelle zu immer kleineren x-Werten (x<0).

Je nach Wahl der Parameter schneidet die Kurve die x-Achse in ein bis drei Punkten (Polynome 3. Grades besitzen mindestens eine und höchstens drei reelle Nullstellen).

4. Grad $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

In der Grundform a=1, b=0, c=0, d=0 und e=0 (Startwerte) und solange b=0 und d=0 sind, ist sie gerade, d.h. spiegelsymmetrisch zur y-Achse. In der Grundform ähnelt sie einer Parabel, aber mit flacherem Boden und steileren Seiten.

- e verschiebt die Kurve in der y-Richtung.
- a verändert die Steilheit der Kurve (und damit die Skalierung der x-Werte) – für a>0 ist sie nach oben offen, für a<0 nach unten offen.
- c erhält die Symmetrie. Wenn a und c dasselbe Vorzeichen haben, wird die Kurve gestreckt, haben sie entgegengesetzte Vorzeichen, so entstehen Seitenminima bzw. –maxima ("schwingen").
- b und d zerstören die Symmetrie.

Je nach Wahl der Parameter schneidet die Kurve die x-Achse in maximal vier Punkten (höchstens vier reelle Nullstellen). Man kann die Parameter auch so wählen, dass es keinen Schnittpunkt gibt.

Exponential-Funktion: $y = f(x) = a \cdot e^{bx+c}$

Die e-Funktion besitzt keine Symmetrie, keine Nullstellen und keine Extremwerte. In der Grundform a=1, b=1 und c=0 ($y = e^x$) geht sie durch den Punkt (0; 1) und hat dort eine Steigung von 1.

- a verändert die Skalierung der y-Werte. Für a<0 liegt die Kurve unterhalb der x-Achse.
- b verändert die Skalierung der x-Werte. Für b>0 ist die e-Funktion streng monoton wachsend und es gilt: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Für b<0 ist die e-Funktion streng monoton fallend und es gilt: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.
- c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung, die aber auch als eine Umskalierung der y-Werte aufgefasst werden kann. Werden a und c gleichzeitig verändert, so dass $a = e^{-c}$, so ändert sich die Kurve nicht.

Logarithmus-naturalis-Funktion: $y = f(x) = a \cdot \ln(bx + c)$

Die ln-Funktion besitzt keine Symmetrie und keine Extremwerte. In der Grundform a=1, b=1 und c=0 ($y = \ln(x)$) hat sie bei $x_0 = 1$ eine Nullstelle und eine Steigung von 1. Die ln-Funktion ist nur für positive Argumente definiert.

- a verändert die Skalierung der y-Werte.
- b verändert die Skalierung der x-Werte.
  Für b>0 ist der ln nur für $x > \frac{-c}{b}$ definiert, für b<0 nur für $x < \frac{-c}{b}$.
- c bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung um $\frac{-c}{b}$.

Visualisierung der Ableitung

Für jede der beschriebenen Funktionen zeigt das untere Bild die zugehörige Ableitungsfunktion. Für jeden x-Wert ist dies die Steigung der Tangente. Um dies zu verdeutlichen, ist im oberen Bild für einen festen x-Wert grün die Tangente eingezeichnet. Der gewählte x-Wert kann mit dem Schieber "x-Wert" oder durch Fassen der blauen Linie mit der Maus verschoben werden. Für diesen x-Wert wird im oberen Bild der Funktionswert, im unteren Bild der Wert der Ableitungsfunktion, d.h. die Steigung der Tangente angegeben.

Bitte achten Sie auf folgende Punkte:

- Ist die Steigung der Tangente im oberen Bild positiv (negativ), so ist auch der Wert der Ableitungsfunktion im unteren Bild positiv (negativ). Je größer die Steigung der Tangente (d.h. je steiler die Kurve), desto größer ist auch der Betrag der Ableitungsfunktion.
- Verläuft die Tangente an einer Stelle waagrecht, so schneidet oder berührt die Ableitungsfunktion an dieser Stelle die x-Achse.
- Ändert die Ableitungsfunktion an dieser Stelle ihr Vorzeichen (wird die x-Achse geschnitten), so liegt ein Extremwert der Funktion vor. Ändert die Ableitungsfunktion an dieser Stelle ihr Vorzeichen nicht (wird die x-Achse nur berührt), so liegt kein Extremwert der Funktion vor, sondern ein Wendepunkt.
- Ändert die Ableitungsfunktion an dieser Stelle ihr Vorzeichen von + nach –, so liegt ein Maximum der Funktion vor. Ändert die Ableitungsfunktion ihr Vorzeichen dagegen von – nach +, so liegt ein Minimum der Funktion vor.

- Abgesehen von Faktoren ist
  – die Ableitung des Sinus der Cosinus (und umgekehrt),
  – die Ableitung des Sinus hyperbolicus der Cosinus hyperbolicus (und umgekehrt),
  – die Ableitung eines Polynoms n-ten Grades ein Polynom (n-1)-ten Grades,
  – die Ableitung der e-Funktion wieder die e-Funktion,
  – die Ableitung von $a \cdot \ln(bx + c)$ ist $\frac{ab}{bx+c}$

Bedienung der Webapp (Kurzfassung)

Die gewünschte Grundfunktion lässt sich über die Toolbar auswählen. Dadurch wird diese Funktion mit einem bestimmten Parametersatz geladen. Zur Übersicht welche Parameter welchem Buchstaben zugeordnet sind, wird die Formel im Zeichenbereich gezeigt.

Die Parameter können im Parametereingabebereich mittels Texteingabefeld oder dem zugehörigen Schieberegler innerhalb der gegebenen Grenzen geändert werden. Diese Werte werden sofort auf das Schaubild übertragen, damit die Auswirkungen direkt erkennbar werden. Ferner kann man bei der Polynomfunktion über ein Drop-Down-Menü den Grad des Polynoms festlegen. Mit dem x-Wert kann bestimmt werden, an welcher Position der Funktionswert bzw. der Wert der Ableitungsfunktion eingeblendet werden soll. Der x-Wert kann auch mittels Drag and Drop direkt im Zeichenbereich verschoben werden. Zusätzlich wird an dieser x-Position eine Tangente an die Funktion gezeichnet, die verdeutlichen soll, dass die Steigung der Tangente dem y-Wert der Ableitungsfunktion entspricht.