S2 Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Stoffgebiet: Schwingungen allgemein, gedämpfte Schwingungen, erzwungene Schwingungen, Drehpendel

Versuchsziel: Mathematische Behandlung von Schwingungsproblemen, Anwendung komplexer Zahlen auf Schwingungsprobleme, Bestimmung der Dämpfung einer Schwingung, Aufnahme der Resonanzkurve

Literatur: Lehrbücher der Physik, z.B.
Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure
Dobrinski, Krakau, Vogel: Physik für Ingenieure
Lindner: Physik für Ingenieure
Gerthsen: Physik

1. Grundlagen

1.1 Gedämpfte Schwingung

Eine Schwingung, deren Amplitude konstant bleibt, heißt ungedämpfte Schwingung. Greift an einem schwingenden Körper, dem von außen keine Energie zugeführt wird, eine Reibungskraft an, so erhält man eine gedämpfte Schwingung, bei der die Amplitude ständig abnimmt. Die Reibungskraft ist häufig der Geschwindigkeit proportional und ihr immer entgegengerichtet:

$$F_R = -k \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

Aus der Bewegungsgleichung des elastischen Pendels bekommt man dann die folgende Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x = 0 \qquad (2)$$

k = Dämpfungskonstante   **c** = Richtgröße
m = Masse des schwingenden Körpers   **x** = Auslenkung

Die Lösung der Differentialgleichung (2) findet man bequem, wenn man sie als komplexe Zahl ansetzt:

$$\mathbf{z = x + iy}$$

Mit $\mathbf{x = A \cos \phi}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{A \sin \phi}$ kann man auch $\mathbf{z = A\, e^{i\phi}}$ schreiben.

Zunächst schreibt man die Gleichung (2) als Gleichung zwischen komplexen Zahlen:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + k \cdot \frac{dz}{dt} + c \cdot z = 0 \qquad (3)$$

und setzt

$$z = A \cdot e^{i \cdot \varphi} = A \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \qquad (4)$$

Hier wurde $\phi = \omega \cdot t$ gesetzt, d.h. der Punkt $z = A \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ beschreibt in der komplexen Zahlenebene einen Kreis; er läuft mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um.

Setzt man **z** nach Gleichung (4) und seine Ableitungen in Gleichung (3) ein, so erhält man nach kurzer Vereinfachung die folgende quadratische Gleichung für ω :

$$\omega^2 - i \cdot \frac{k}{m} \cdot \omega - \frac{c}{m} = 0 \qquad (5)$$

Hieraus folgt:

$$\omega = \frac{i}{2} \cdot \frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}}$$

Also wird

$$z = A \cdot e^{i\left(\frac{i \cdot k}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}}\right) \cdot t}$$

$$z = A \cdot e^{-\frac{k}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot e^{\pm i \cdot \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}} \cdot t} \qquad (6)$$

Die Projektion von **z** auf die Zahlenachsen beschreibt eine gedämpfte Schwingung. Sie wird durch den Realteil (oder den Imaginärteil) dieser komplexen Zahl dargestellt:

$$x = A \cdot e^{-\frac{k \cdot t}{2 \cdot m}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}} \cdot t\right) \qquad (7)$$

Statt Gleichung (7) kann man auch schreiben:

$$x = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos \omega \cdot t = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) \qquad (8)$$

$$\text{mit} \quad \delta = \frac{k}{2 \cdot m} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4 \cdot m^2}} \quad \text{wobei} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

die Frequenz ohne Dämpfung ist.

Das Verhältnis der Amplitude einer gedämpften Schwingung zur Amplitude nach Ablauf einer Periode ist dauernd konstant: $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = ... = \frac{A_n}{A_{n+1}}$

Den natürlichen Logarithmus dieses Verhältnisses nennt man das logarithmische Dekrement $\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$

Es ist $\Lambda = \delta \cdot T$

1.2 Erzwungene Schwingung

Jedes schwingungsfähige System kann durch äußere periodische Kräfte zu Schwingungen angeregt werden, deren Frequenzen nicht mit den Eigenfrequenzen des Systems übereinstimmen müssen.
Diese erzwungenen Schwingungen werden durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) \qquad (11)$$

$F_0 \cdot \cos \cdot \omega_e \cdot t$ entspricht der äußeren periodischen Kraft mit der Frequenz $f_e = \frac{\omega_e}{2 \cdot \pi}$

und der Amplitude F_0.

Für die Lösung der Differentialgleichung (11) geht man analog zu Gleichung (1) vor.
Man setzt also wieder eine komplexe Zahl an

$$z = A \cdot e^{i(\omega_e \cdot t - \alpha)} \qquad (12)$$

(α berücksichtigt die Phasendifferenz zwischen der erregten Schwingung und der sie erregenden Kraft) und schreibt statt Gleichung (11) folgendermaßen:

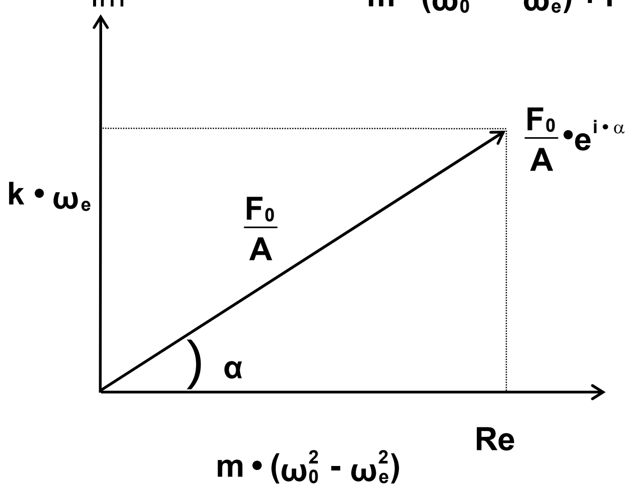
$$m \cdot \frac{d^2 \cdot z}{dt^2} + k \cdot \frac{dz}{dt} + c \cdot z = F_0 \cdot e^{\,i \cdot \omega_e \cdot t} \qquad (13)$$

Entsprechend Gleichung (12) wird z und seine Ableitungen in (13) eingesetzt und

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

gesetzt ($\boldsymbol{\omega_0}$ = Eigenfrequenz des ungedämpften elastischen Pendels) und man bekommt hiermit nach Vereinfachung:

$$m \cdot (\omega_0^2 - \omega_e^2) + i \cdot \omega_e \cdot k = \frac{F_0}{A} \cdot e^{i \cdot \alpha}$$



Aus der komplexen Zahlenebene sieht man jetzt unmittelbar

$$\frac{F_0}{A} = \sqrt{(m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + k^2 \cdot \omega_e^2)} \qquad (14)$$

und

$$\tan \alpha = \frac{\omega_e \cdot k}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega_e^2)} \qquad (15)$$

Die Schwingung wird also durch den Realteil (oder Imaginärteil) von Gleichung (12) beschrieben:

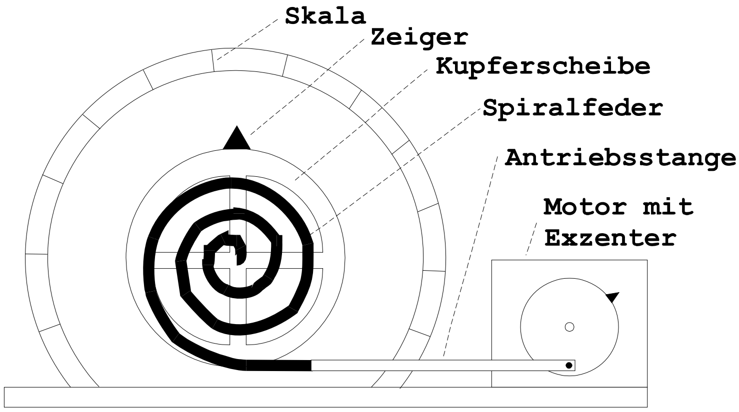
$$x = A \cdot \cos(\omega_e \cdot t - \alpha) = \frac{F_0}{\sqrt{(m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + k^2 \cdot \omega_e^2)}} \cdot \cos(\omega_e \cdot t - \alpha) \qquad (16)$$

$$A = A \cdot (\omega_e) = \frac{F_0}{\sqrt{(m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + k^2 \cdot \omega_e^2)}}$$ heißt Resonanzkurve.

Gleichung (16) gilt nur nach Beendigung des Einschwingvorgangs !

Die Gleichungen (1) bis (16) für gedämpfte bzw. erzwungene Schwingungen wurden für eine lineare Schwingung hergeleitet. Sie gelten jedoch sinngemäß für Drehschwingungen, wenn man die Größen der Translationsbewegung durch die entsprechenden Größen für eine Rotationsbewegung ersetzt, d.h. die Auslenkung **x** wird durch den Winkel φ , die Kraft **F** durch das Drehmoment **M** und die Masse **m** durch das Trägheitsmoment **J** ersetzt.

1.3 Pohlsches Rad



Eine drehbar gelagerte Kupferscheibe dient beim Pohlschen Rad als drehschwingungsfähiges System. An dieser greift eine Spiralfeder zur Erzeugung des rücktreibenden Drehmomentes an. Ein an der Kupferscheibe befestigter Zeiger erlaubt es die Auslenkung auf einer Skala abzulesen. Lenkt man die Kupferscheibe von Hand aus und lässt sie dann los, so erhält man durch die Lagerreibung (Eigendämpfung) eine gedämpfte Schwingung. Zusätzlich kann noch eine regelbare Dämpfung durch Wirbelströme eingeschaltet werden. Das Ende der Spiralfeder ist über eine Stange mit einem Exzenter verbunden. Dieser Exzenter wird durch einen Elektromotor angetrieben, dessen Drehzahl veränderlich ist. Mit Hilfe dieses Exzenters kann man eine erzwungene Schwingung erzeugen, deren Anregungsfrequenz sich aus der Drehzahl des Motors ergibt. Die Amplitude des erregenden Drehmomentes ist an der Verbindungsstelle von Spiralfeder und Antriebsstange einstellbar.

2. Versuchsdurchführung

2.1 Gedämpfte Schwingung

2.1.1 Messen Sie bei einer freien Schwingung die Schwingungsdauer des **ungedämpften** Systems (d.h. nur mit Eigendämpfung), sowie mit einer Bremsspannung von **2,5 V** und **5 V**.

2.1.2 Berechnen Sie die Eigenfrequenz bei der freien Schwingung und bei den gedämpften Schwingungen. Wie ändert sich die Eigenfrequenz mit der Dämpfung ?

2.1.3 Messen Sie die Amplitudenabnahme bei einer freien Schwingung des **ungedämpften** Systems, sowie bei einer Bremsspannung von **2,5 V** und **5 V** als Funktion der Zeit (**t** als Vielfaches der Schwingungsdauer **T**). Tragen Sie **ln A** (natürlicher Logarithmus) als Funktion von **t** (in **s**) graphisch auf.

2.1.4 Bestimmen Sie aus der Zeichnung die Dämpfungsgröße δ der freien Schwingung bei verschiedener Dämpfung sowie das zugehörige logarithmische Dekrement $\delta \bullet \mathbf{T}$.

(Hinweis: Eine größere Genauigkeit bekommt man, indem man die Steigung der Geraden mit Hilfe der linearen Regression berechnet).

2.1.5 Diskutieren Sie die Versuchsergebnisse !

2.2 Erzwungene Schwingung

2.2.1 Bestimmen Sie bei der erzwungenen Schwingung die Amplitude als Funktion der Motordrehzahl (d.h. als Funktion der Erregerfrequenz $\mathbf{f_e}$) bei einer Bremsspannung von **2,5 V** und der größten Amplitude des erregenden Momentes.
Die Messergebnisse sind in eine Tabelle einzutragen und graphisch darzustellen $\mathbf{(A = A (f_e))}$.

2.2.2 Was ändert sich an den Ergebnissen von 2.2.1, wenn man ohne Bremsspannung bzw. mit einer Bremsspannung von **5 V** arbeitet ?

2.2.3 Was ändert sich an den Ergebnissen von 2.2.1, wenn man die Amplitude des erregenden Momentes verkleinert ?

3. Fragen zum Versuch und Stoffgebiet

3.1 Was versteht man unter Resonanz ?

3.2 Was versteht man unter dem logarithmischen Dekrement ?

3.3 Bei welcher Frequenz $\mathbf{f_e}$ wird die Amplitude der ungedämpften Schwingung am größten ?

3.4 Wie ändert sich die Amplitude mit zunehmender Dämpfung ?
Bei welcher Frequenz liegt jetzt das Maximum der Amplitude ?

3.5 Die Gl. (15) und (16) sind aus Gl. (11) durch eine ausführliche Lösung herzuleiten.

3.6 Wie sieht der Verlauf $\mathbf{A = A(f_e)}$ entsprechend Gl. (16) qualitativ aus ?

3.7 Wie verhalten sich die Phasen der erregten Schwingung und des Erregers zueinander ? Wie sieht der Verlauf $\alpha = \alpha\,(\mathbf{f_e})$ entsprechend Gl. (15) qualitativ aus ?

3.8 Wie bekommt man δ aus der graphischen Darstellung „ **ln A** als Funktion von **t** “ ?