S1 Mathematisches und physikalisches Pendel

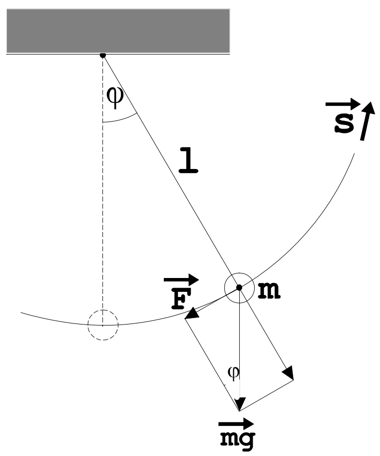
Stoffgebiet:	Schwingungen allgemein, mathematisches Pendel, physikalisches Pendel, Steinerscher Satz
Versuchsziel:	Mathematische Behandlung von Schwingungsvorgängen (Näherungen, allgemeine Lösungsmethoden), Messung der Erdbeschleunigung **g**
Literatur:	Lehrbücher der Physik, z.B. Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure Dobrinski, Krakau, Vogel: Physik für Ingenieure Lindner: Physik für Ingenieure

1. Grundlagen

1.1 Mathematisches Pendel

Als mathematisches Pendel kann näherungsweise eine Kugel dienen, die an einer Schnur aufgehängt wird. Die Masse des Fadens wird hierbei vernachlässigt und die Masse des Pendelkörpers wird im Schwerpunkt vereinigt gedacht.

Der Pendelkörper beschreibt bei einer Auslenkung aus der Gleichgewichtslage einen Kreisbogen mit dem Radius **l**. Wird das Pendel um den Winkel φ aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt, so wirkt eine rücktreibende Kraft



$$\mathbf{F = m \cdot g \cdot \sin\varphi}$$

Mit **s = l** φ bekommt man dann aus der Newtonschen Gleichung (Beschleunigung **a** hat entgegengesetzte Richtung wie die Auslenkung **s**):

$$\mathbf{F = m \cdot a = -\,m\frac{d^2s}{dt^2} = -\,m \cdot l\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin\varphi}$$

$$\mathbf{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\sin \cdot \varphi}$$

l = Pendellänge (vom Aufhängepunkt bis zum Mittelpunkt der Kugel)

Die Differentialgleichung dieser nicht harmonischen Schwingung ist nicht elementar lösbar.

Zur Vereinfachung beschränkt man sich deshalb auf kleine Pendelausschläge und kann dann näherungsweise $\sin\varphi \approx \varphi$ setzen und bekommt hiermit die einfachere Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega \bullet t + k)$$

Hierbei ist **k** eine Integrationskonstante, φ_0 ist die Amplitude und die Kreisfrequenz **ω** ergibt sich zu:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Hieraus ergibt sich dann die näherungsweise Schwingungsdauer des mathematischen Pendels für kleine Auslenkungen:

$$T = \frac{2 \bullet \pi}{\omega} = 2 \bullet \pi \bullet \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1a)$$

Ohne Beschränkung auf kleine Pendelausschläge lässt sich die Schwingungsdauer durch eine Reihenentwicklung darstellen:

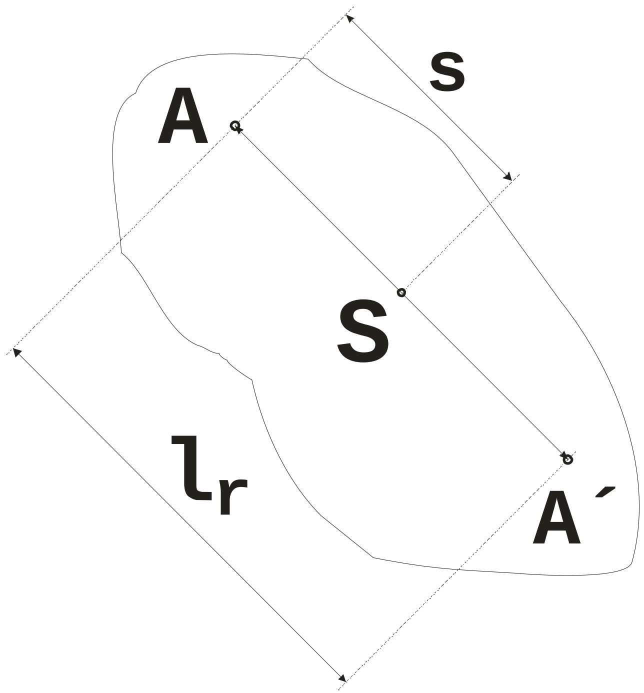
$$T = 2 \bullet \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \bullet \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \bullet 3}{2 \bullet 4}\right)^2 \bullet \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right] \qquad (1b)$$

1.2 Physikalisches Pendel

Als physikalisches Pendel bezeichnet man jeden Körper, der unter dem Einfluß seines Gewichts eine Schwingung ausführt. Die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels ist

$$T = 2 \bullet \pi \sqrt{\frac{J_A}{m \bullet g \bullet s}} \qquad (2)$$

(Herleitung dieser Formel: siehe Versuch Maxwellsches Rad)



A = Aufhängepunkt

S = Schwerpunkt

l_r = reduzierte Pendellänge

s = Abstand des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt

J_A = Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch den Aufhängepunkt gehende Achse

m = Gesamtmasse des physikalischen Pendels

Mit Hilfe des Steinerschen Satzes kann man Gleichung (2) in folgender Form schreiben:

$$T = 2 \bullet \pi \sqrt{\frac{J_S + m \bullet s^2}{m \bullet g \bullet s}} \qquad (3)$$

J_S = Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Achse, Achsenrichtung parallel zur Achse in Gleichung (2).

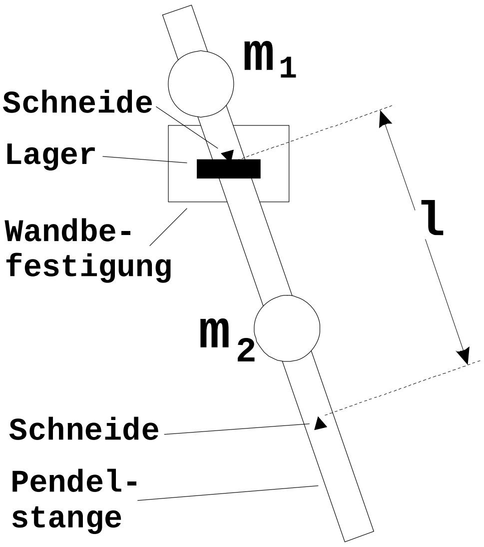
Die reduzierte Pendellänge l_r ist die Länge des mathematischen Pendels, das die gleiche Schwingungsdauer besitzt wie das physikalische Pendel:

$$l_r = \frac{J_S + m \bullet s^2}{m \bullet s}$$

Hängt man nun das Pendel im Schwingungsmittelpunkt **A´** (das ist der Punkt auf der Verbindungsgeraden Aufhängepunkt **A** - Schwerpunkt **S** im Abstand $\mathbf{l_r}$ von **A**) auf, so bekommt man die gleiche reduzierte Pendellänge $\mathbf{l_r} = \mathbf{l_r}'$. Also ändert sich die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels nicht, wenn man den Schwingungsmittelpunkt zum Drehpunkt macht.

1.3 Reversionspendel

Das Reversionspendel dient zur Präzisionsbestimmung der Erdbeschleunigung g. Dabei wird die Eigenschaft ausgenutzt, dass sich die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels nicht ändert, wenn man den Schwingungsmittelpunkt zum Drehpunkt macht.



Das Reversionspendel besteht aus einem Metallstab mit zwei verschiebbaren Metallscheiben und zwei einander zugewandten Schneiden als Aufhängevorrichtungen. *Der Abstand der beiden Schneiden ist auf der Pendelrückseite eingraviert*. Die eine Metallscheibe mit der Masse $\mathbf{m_2}$ = 1400g lässt sich zwischen den beiden Schneiden verschieben und die andere Scheibe mit der Masse $\mathbf{m_1}$ = 1000g außerhalb der einen Schneide verschieben.

Um das Pendel schwingen zu lassen, benützt man eine Wandbefestigung, an der sich ein Lager befindet, in das das Pendel mit der Schneide eingehängt wird. Man lässt das Pendel abwechselnd um eine der beiden Schneiden schwingen und kann durch Verschieben der beiden Massen erreichen, dass die Schwingungsdauer des Pendels um beide Schneiden gleich wird. Dann ist die Länge **l** gleich der Länge eines gleichschwingenden mathematischen Pendels und nach Gleichung (1) kann hieraus die Erdbeschleunigung berechnet werden.

2. Versuchsdurchführung

2.1 Messverfahren: Mathematisches Pendel

2.1.1 Messen Sie die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendel aus **50** Schwingungen (**3mal**).

2.1.2 Berechnen Sie die Erdbeschleunigung aus der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels.

2.1.3 Berechnen Sie den relativen Fehler der Erdbeschleunigung aus den Fehlern der einzelnen Messgrößen und geben Sie eine Abschätzung für die Größe der sonstigen Fehler an, die durch die Näherungsverfahren bei der Herleitung der Gleichungen (1) und (2) entstehen.

2.2 Messverfahren: Physikalisches Pendel

2.2.1 Durch Messen der Schwingungsdauern um die beiden Schneiden des Reversionspendels und Verschieben der inneren Masse wird die Stellung der Masse gesucht, bei der die Schwingungsdauer um beide Schneiden gleich ist. Praktisch geht man am besten so vor, dass man die innere, zwischen den Schneiden befindliche, Masse verschiebt.

Am einfachsten findet man die Stellung der Laufmasse, in der das Pendel um beide Achsen gleich lang schwingt, wenn man die Laufmasse von einer Schneide zur anderen in **10 cm** - Abschnitten verschiebt und die Schwingungsdauer um beide Schwingungsachsen misst. Hierzu werden bei der Grobmessung **10** Schwingungen gemessen. Man trägt in ein Koordinatensystem auf der Abszisse die Stellung der Laufmasse und auf der Ordinate die Periodendauer auf.

Verbindet man die zur gleichen Drehachse gehörenden Punkte, so erhält man zwei Kurven, die sich in zwei Punkten schneiden müssen.

Hat man die Schnittpunkte ungefähr bestimmt, so wird in der Nähe des geeigneteren Schnittpunkts (Begründung!) eine Feinmessung nach demselben Prinzip durchgeführt. Dabei wird die Laufmasse in **1cm** – Abschnitten von **3 cm** vor dem ungefähren Schnittpunkt bis **3 cm** nach diesem verschoben und wieder die Periodendauer um beide Achsen gemessen. Hierzu werden bei der Feinmessung **20** Schwingungen gemessen. Die Messpunkte werden wie bei der Grobmessung aufgetragen und der gesuchte Schnittpunkt bestimmt.

Der Maßstab bei Grob- und Feinmessung sollte so gewählt werden, daß die sich ergebenden Kurven über ein DIN-A4 - Blatt gestreckt werden. Dabei sollte zumindest die Feinmessung auf **Millimeterpapier** aufgezeichnet werden.

2.2.2 Berechnen Sie die Erdbeschleunigung aus der Schwingungsdauer des Reversionspendels.

2.2.3 Berechnen Sie den relativen Fehler der Erdbeschleunigung aus den Fehlern der einzelnen Messgrößen und geben Sie eine Abschätzung für die Größe der sonstigen Fehler an, die durch die Näherungsverfahren bei der Herleitung der Gleichungen (1) und (2) entstehen.

2.3.1 Berechnen Sie die Erdbeschleunigung für Aalen möglichst genau. Hierzu sind die folgenden Formeln zu benützen:

$\mathbf{g_0 = 9{,}78049 \; \frac{m}{s^2}}$ = Erdbeschleunigung am Äquator in Meereshöhe

$\mathbf{g_{h=0}}$ **=** Erdbeschleunigung an einem Ort der geographischen Breite φ in Meereshöhe

$$\mathbf{g_{h=0} = g_0 \, (1 + 0{,}0052884 \cdot \sin^2 \varphi \; - \; 0{,}0000059 \cdot \sin^2 (2\,\varphi))}$$

$\mathbf{g_h}$ **=** Erdbeschleunigung an einem Ort der geographischen Breite φ in der Höhe **h**

(Freiluftkorrektur)

$$\mathbf{g_h = g_{h=0} - c_1 \cdot h \quad mit \quad c_1 = 3{,}086 \cdot 10^{-6} \; \frac{1}{s^2}}$$

$\mathbf{g_h}$ erhöht sich zusätzlich um $\mathbf{\Delta g}$ bei einer Gesteinsplatte der Dichte ρ und der Höhe **h**

$$\mathbf{\Delta g = c_2 \cdot \rho \cdot h} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c_2 = 4{,}19 \cdot 10^{-10} \; \frac{m^3}{kg \cdot s^2}}$$

Mittlere Dichte der Erde an der Erdoberfläche: ρ **= 2,5 g/cm^3**

Aalen: **48,83 ^{0}** nördliche Breite, Höhe: **477,1 m**

2.3.2 Vergleichen Sie die Werte aus 2.1.2 und 2.2.2 mit dem Wert von 2.3.1.
Wie groß sind die prozentualen Abweichungen?
Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den relativen Fehlern.

3. Fragen zu Versuch und Stoffgebiet

3.1 Welche Näherungen werden bei der Herleitung der Formeln für die Schwingungsdauern beim mathematischen und physikalischen Pendel gemacht ?

3.2 Von welchen Größen hängt die Erdbeschleunigung an einem bestimmten Ort ab ? Woran liegt das ?

3.3 Welche Begriffe benutzt man in der Physik für die Beschreibung einer Schwingung?

3.4 Was versteht man allgemein unter einer Schwingung und was speziell unter einer harmonischen Schwingung?

3.5 Wie leitet man die Gleichungen (2) und (3) her?

3.6 Was besagt der Steinersche Satz?

3.7 Berechnen Sie den Fehler in der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels ab, wenn man die Näherungsformel (1a) statt der Formel (1b) benützt für die Amplituden $\varphi_0 = \mathbf{5^0}$ und $\varphi_0 = \mathbf{10^0}$