F Anleitung zur Fehlerrechnung im Physikpraktikum

Literatur: Norm DIN 1319

VDI-Richtlinien	2048 Blatt 1
	2620 Blatt 1 u. 2
G.L. Squires:	Messergebnisse und ihre Auswertung
	Verlag de Gruyter Berlin
G. Hartwig:	Einführung in die Fehler- und Ausgleichsrechnung
	Carl Hanser Verlag München
W. Walcher:	Praktikum der Physik
	Teubner Studienbücher -Physik-

1. Fehler und Fehlerarten

1.1 Definition des Fehlers

a) Absoluter Fehler

Messwerte und aus Messwerten berechnete Ergebnisse sind immer mit Fehlern behaftet. Der absolute Fehler Δx ist der Unterschied zwischen gemessenem Istwert der Messgröße $\mathbf{x}$ (Messwert) und dem wahren Wert der Messgröße $\mathbf{x_W}$.

$\Delta x = x - x_W$.

Der absolute Fehler hat die Dimension der Messgröße.

b) Relativer Fehler

Häufig wird auch mit dem relativen Fehler gerechnet:

$$\text{Relativer Fehler} = \frac{\text{absoluter Fehler}}{\text{wahrer Wert}} = \frac{\Delta x}{x_W}$$

Da der wahre Wert $\mathbf{x_W}$ einer Messgröße nie genau bekannt ist, wird der Fehler (Voraussetzung: der Fehler ist "genügend klein") auf den Messwert $\mathbf{x}$ bezogen:

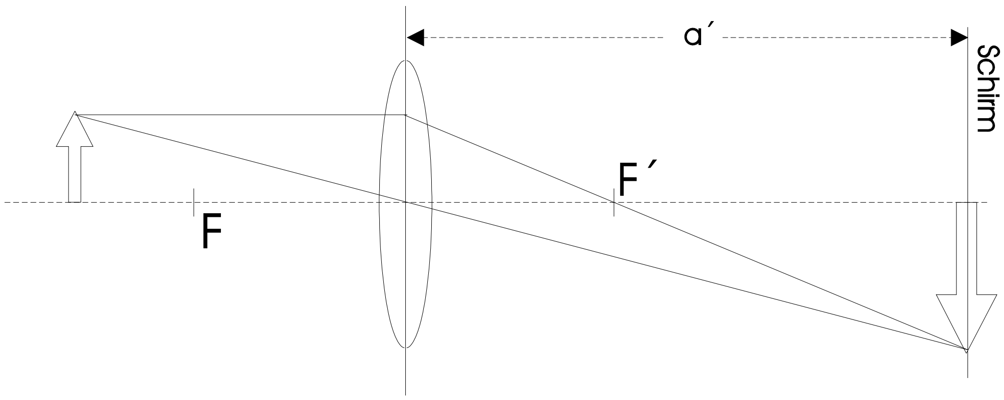
$$\text{Relativer Fehler} = \frac{\Delta x}{x} \qquad \left(\text{Rel. Fehler in \%} = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\right)$$

1.2 Systematische Fehler

Systematische Fehler sind Fehler, die ihre Ursache im Meßsystem haben. Sie sind reproduzierbar und treten bei Wiederholung der Messung in gleicher Richtung und Größe auf. Systematische Fehler machen eine Messung unrichtig.
Beispiel: Ein Maßstab oder ein Messinstrument wurde falsch geeicht;
diese Art von systematischen Fehlern können nur durch Kontrolle erfasst und durch Neueichung der Messgeräte beseitigt werden.
Systematische Fehler können aber auch durch Irrtum von Beobachtern, Anwendung ungeeigneter Messverfahren usw. entstehen.
Eine wichtige Ursache für systematische Fehler besteht darin, daß Messgeräte eine bestimmte "Güte" haben; so können z.B. mit einer einfachen Schieblehre Längen nur auf ± 0,1mm genau[1] gemessen werden.
Dieser systematische Fehler kann nur durch Verbesserung des Meßsystems verkleinert werden (Schieblehre >> Mikrometerschraube).

1.3 Zufällige Fehler

Zufällige Fehler sind nicht reproduzierbar, d.h. sie sind bei Wiederholungen von Messungen einer konstanten Messgröße mit derselben Messeinrichtung nach Größe und Betrag verschieden. Zufällige Fehler machen eine Messung ungenau.
Beispiel: Messung der Bildweite a´ mit folgender einfacher Linsenanordnung

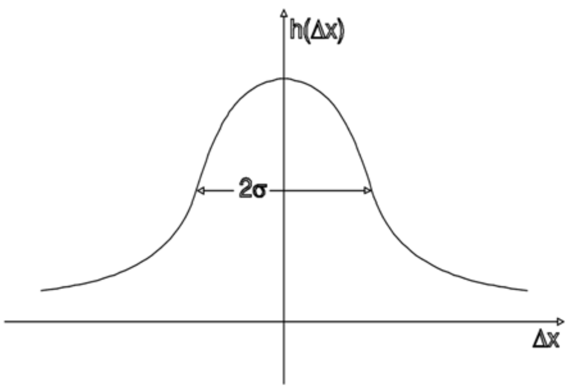


[1]Die Angabe ±0,1mm ist als sog. Garantiefehlergrenze zu interpretieren (s. Norm DIN 1319,7.1.1). Bei einem Kollektiv von Schieblehren kann das positive oder das negative Vorzeichen, jedoch im Einzelfall jeweils nur ein Vorzeichen zutreffen, d.h. es handelt sich im Einzelfall um einen systematischen Fehler.

Durch Verschieben des Schirms wird das Bild scharfgestellt. Da die Schärfe nicht exakt beurteilt werden kann, streuen die abgelesenen Werte von **a´**. Die Abweichungen von der wahren Bildweite $\mathbf{a_w}$**´** sind im allgemeinen nach Größe und Richtung verschieden, da das Bild zufällig einmal früher und einmal später als scharf erkannt wird.
Zufällige Fehler können durch eine größere Anzahl von Messungen verringert werden. Sie sind theoretisch erfassbar (Gaußsche Fehlertheorie).
Zufällige Fehler und systematische Fehler können nicht immer streng voneinander getrennt werden. Der Gesamtfehler wird meist durch Überlagerung beider Fehlerarten entstehen.

2. Rechnerische Erfassung der zufällig verteilten Fehler

Die Darstellung der relativen Häufigkeit der Fehler **h (Δx)** in Abhängigkeit vom absoluten Fehler **Δx** nennt man Fehlerverteilung.



Es ist in der Praxis üblich und aufgrund langer Erfahrung auch sinnvoll, als Verteilungsform der zufälligen Fehler eine Gaußverteilung (Normalverteilung) anzunehmen:

$$h(\Delta x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2}$$

2.1 Mittelwert

Bei mit zufälligen Fehlern behafteten Messgrößen können zur Erhöhung der Messgenauigkeit mehrere Messungen vorgenommen werden $n \geq 10$.
Der Bestwert ist der arithmetische Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.2 Mittlerer Fehler des Einzelwerts σ und mittlerer Fehler des Mittelwerts Δ**x**

Der mittlere Fehler des Einzelwerts σ (Standardabweichung) ist ein Maß für die Abweichung des Einzelmesswerts vom Mittelwert $\bar{\mathbf{x}}$ (Breite der Gaußschen Glockenkurve).

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum(\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{n}-\mathbf{1}}} = \sqrt{\frac{\sum\left(\mathbf{x_i} - \frac{\sum \mathbf{x_i}}{\mathbf{n}}\right)^2}{\mathbf{n}-\mathbf{1}}}$$

n	Anzahl der Messwerte
$\bar{\mathbf{x}}$	Mittelwert
$\mathbf{x_i}$	Einzelmesswerte

(σ wird auch als Stichprobenstandardabweichung bezeichnet)

Die Kenngröße σ gibt folgendes an:

Wird irgend ein $\bar{\mathbf{x}}$ gemessen, so liegen innerhalb der Grenzen

$\bar{\mathbf{x}} \pm \sigma$	68,3%
$\bar{\mathbf{x}} \pm \mathbf{2}\sigma$	95,4%
$\bar{\mathbf{x}} \pm \mathbf{3}\sigma$	99,7%

aller Meßwerte.

Der <u>mittlere Fehler des Mittelwerts Δ**x**</u> ist kleiner als der mittlere Fehler des Einzelwerts:

$$\Delta\mathbf{x} = \frac{\mathbf{t} \bullet \sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}} = \mathbf{t} \bullet \sqrt{\frac{\sum(\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{n} \bullet (\mathbf{n}-\mathbf{1})}}$$

Für t = 1,2,3 liegen 68,3%, 95,4%, 99,7% aller durch Wiederholung der Messung ermittelten Mittelwerte $\bar{\mathbf{x}}$ innerhalb $\bar{\mathbf{x}} \pm \Delta\mathbf{x}$.

In der Physik und der Vermessungstechnik begnügt man sich mit einer statistischen Sicherheit von 68,3% und setzt deshalb t = 1:

$$\Delta\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{n}}}$$

(In der Industrie wird t = 2, in der Biologie t = 3 bevorzugt.)

2.3 Beispiel zur Berechnung von Mittelwert, Standardabweichung und mittlerem Fehler des Mittelwerts

Bei dem unter 1.3 genannten Beispiel zur Messung der Bildweite **a´** wurden 10 Werte von **a´** gemessen. Es ergibt sich folgendes Rechenschema:

$a_i'\,[m]$	$(\bar{a}' - a_i')\,[m]$	$(\bar{a}' - a_i')^2\,[m^2]$
0,600	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$
0,601	0	0
0,598	$3 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-6}$
0,605	$-4 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-6}$
0,603	$-2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6}$
0,600	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$
0,603	$-2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6}$
0,600	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$
0,601	0	0
0,599	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6}$

$$\mathbf{0{,}601\ m = \bar{a}'} \qquad \mathbf{40 \bullet 10^{-6}\ m^2 = \sum_{i=1}^{10} (\bar{a}' - a_i')^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\bar{a}' - a_i')^2}{n-1}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{40 \bullet 10^{-6}}{9}} = 0{,}00210815\ \ m$$

$$\Delta a' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \Delta a' = \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 0{,}000666\ \ m$$

Endergebnis: <u>**a´** = (0,601 ± 0,000666)   m</u>

3. Fehlerfortpflanzung

Häufig wird ein Messergebnis **y** aus mehreren Messwerten $\mathbf{x_i}$ gebildet, die in einem funktionalen Zusammenhang stehen:

$$\mathbf{y = f(x_1, x_2, x_3, ...)}$$

Die Messwerte $\mathbf{x_i}$ sind mit systematischen oder zufälligen Fehlern behaftet ($\mathbf{\Delta x_i}$). Da an die Genauigkeit des Messergebnisses **y** meist ganz konkrete Anforderungen gestellt werden, ist die Beantwortung der Frage, wie sich die Fehler $\mathbf{\Delta x_i}$ auf **y** auswirken ("Fehlerfortpflanzung"), von entscheidender Bedeutung. Erst dann kann beurteilt werden, welche Messgrößen besonders sorgfältig und welche weniger genau gemessen werden müssen. Beides beeinflusst den Aufwand, der bei der Messung betrieben wird.

3.1 Grundlagen der Fehlerfortpflanzung

Da im allgemeinen der Fehler $\mathbf{\Delta x_i}$ einer Messgröße $\mathbf{x_i}$ nicht genau bekannt ist, sondern nur die Fehlergrenzen $\mathbf{\pm \Delta x_i}$, ist es in vielen Fällen zweckmäßig, bei der Fehlerfortpflanzung den schlimmsten Fall anzunehmen, d.h. den Fall, dass sich alle auftretenden Fehler "addieren" und nicht etwa gegenseitig aufheben.
Mathematische Grundlage der Fehlerfortpflanzung (Voraussetzung $\mathbf{\Delta x_i \ll x_i}$) ist das sogenannte totale Differential:

$$\Delta \mathbf{y} = \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x_1}} \bullet \Delta \mathbf{x_1} \right| + \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x_2}} \bullet \Delta \mathbf{x_2} \right| + \ldots$$

(Beträge wegen maximaler Abschätzung)
Falls **y** nur von einem Messwert **x** abhängt $\mathbf{(y = f(x))}$,
ergibt sich das "Differential": $\Delta \mathbf{y} = \left| \mathbf{f'(x)} \bullet \Delta \mathbf{x} \right|$

Es ist jedoch nicht immer erforderlich, mit den allgemeinen Formeln zu rechnen; häufig genügt die Anwendung von bereits abgeleiteten Formeln für häufig vorkommende Terme (siehe dazu 3.2).

3.2 Spezielle Rechenregeln für die Fehlerfortpflanzung

Addition und Subtraktion zweier Messgrößen:

$$\mathbf{y = f(x_1,x_2) = x_1 \pm x_2} \qquad \Delta\mathbf{y} = |\Delta\mathbf{x_1}| + |\Delta\mathbf{x_2}|$$

Multiplikation und Division zweier Messgrößen:

$$\mathbf{y = C \bullet x_1 \bullet x_2} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y = C \bullet \frac{x_1}{x_2}} \qquad \frac{\Delta \mathbf{y}}{\mathbf{y}} = \left|\frac{\Delta \mathbf{x_1}}{\mathbf{x_1}}\right| + \left|\frac{\Delta \mathbf{x_2}}{\mathbf{x_2}}\right|$$

Potenz und Wurzel (eine Messgröße):

$$\mathbf{y = C \bullet x^n} \qquad \frac{\Delta \mathbf{y}}{\mathbf{y}} = |\mathbf{n}| \bullet \left|\frac{\Delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right|$$

$$\mathbf{y} = \sqrt[n]{\mathbf{x}} \qquad \frac{\Delta \mathbf{y}}{\mathbf{y}} = \left|\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right| \bullet \left|\frac{\Delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right|$$

Potenzprodukt:

$$\mathbf{y = f(x_1,x_2,...) = C \bullet x_1^k \bullet x_2^m \bullet x_3^n \bullet ...} \qquad \frac{\Delta \mathbf{y}}{\mathbf{y}} = |\mathbf{k}| \bullet \left|\frac{\Delta \mathbf{x_1}}{\mathbf{x_1}}\right| + |\mathbf{m}| \bullet \left|\frac{\Delta \mathbf{x_2}}{\mathbf{x_2}}\right| + ...$$

wobei **C** = konstant

Beachte: Bei Addition und Subtraktion wird der absolute Fehler, bei Multiplikation, Division, Potenzieren und Radizieren wird der relative Fehler benutzt.
Das folgende Beispiel soll zeigen, wie mit Hilfe dieser einfachen Regeln auch kompliziertere Funktionen behandelt werden können.

3.3 Beispiel

Gegeben ist folgender Zusammenhang der Größen **m**, **r** und **a**:

$$J(m,r,a) = m \bullet r^2 \bullet \left(\frac{g}{a} - 1\right)$$

Die Masse m und der Radius r werden direkt gemessen. Die Beschleunigung **a** wird aus anderen Messgrößen[2] berechnet und ist ebenso wie **m** und **r** mit einem Fehler behaftet. Die Fallbeschleunigung **$g = 9{,}81\ m/s^2$** wird als fehlerfrei angesehen. Wie groß ist der Fehler **ΔJ** für das zu berechnende Trägheitsmoment **J** ?

$$m = (0{,}515 \pm 0{,}005)\ \ kg; \qquad \frac{\Delta m}{m} \approx 0{,}01 = 1\%$$

$$r = (0{,}0028 \pm 0{,}0001)\ \ m; \qquad \frac{\Delta r}{r} \approx 0{,}04 = 4\%$$

$$a = (0{,}121 \pm 0{,}005)\ \frac{m}{s^2}; \qquad \frac{\Delta a}{a} \approx 0{,}04 = 4\%$$

Einsetzen der Zahlenwerte (ohne Fehler) in die Formel ergibt:

$$J = 0{,}515\ \ kg \bullet 0{,}0028^2\ \ m^2 \bullet \left(\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{0{,}121\,\frac{m}{s^2}} - 1\right) = 3{,}23 \bullet 10^{-4}\ kg\ m^2$$

a) Fehlerrechnung mit speziellen Formeln

$$J(m,r,a) = u(m,r,a) + v(r,m)$$

wobei $u(m,r,a) = m \bullet r^2 \bullet \frac{g}{a}$

und $v(m,r) = -m \bullet r^2$

u und **v** können nach den Regeln für ein Potenzprodukt behandelt werden:

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \bullet \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta a}{a} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \bullet \frac{\Delta r}{r}$$

---

[2] Die Formel stammt aus Versuch M1 Maxwell´sches Rad. Die Beschleunigung a wird dort aus $a = 2h/t^2$ mit den Messgrößen Fallhöhe h und Fallzeit t ermittelt. Die Fehlerrechnung für a kann direkt nach der Formel für ein Potenzprodukt durchgeführt werden:

$$a(h,t) = \frac{2 \bullet h}{t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{2 \bullet \Delta t}{t}$$

Zur weiteren Behandlung wird für **J (u,v) = u + v** die Summenregel benützt. Vorher wird aus den relativen Fehlern $\frac{\Delta u}{u}$ und $\frac{\Delta v}{v}$ jeweils der absolute Fehler gebildet, da die Summenregel die Benutzung der absoluten Fehler erfordert.

$$\frac{\Delta u}{u} \cdot u = \Delta u; \quad \frac{\Delta v}{v} \cdot v = \Delta v$$

$$\Delta J = \Delta u + \Delta v = u \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta a}{a}\right) + v \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r}\right)$$

Häufig ergibt sich eine Vereinfachung, wenn man den relativen Fehler bildet, bevor man Zahlen einsetzt:

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{u}{u+v} \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta a}{a}\right) + \frac{v}{u+v} \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r}\right)$$

$$= \frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{g}{g-a} \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

$$\approx 0{,}01 + 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}13 = \underline{13\%}$$

Endergebnis: $\underline{\underline{J = (3{,}23 \pm 0{,}42) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2}}$

<u>b) Fehlerrechnung mit totalem Differential</u>

$$J(m, r, a) = m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{g}{a} - 1\right)$$

$$\Delta J = \left|\frac{\partial J}{\partial m} \cdot \Delta m\right| + \left|\frac{\partial J}{\partial r} \cdot \Delta r\right| + \left|\frac{\partial J}{\partial a} \cdot \Delta a\right|$$

$$= r^2 \cdot \left(\frac{g}{a} - 1\right) \cdot \Delta m + 2 \cdot m \cdot r \cdot \left(\frac{g}{a} - 1\right) \cdot \Delta r + \left|\frac{-m \cdot r^2 \cdot g}{a^2}\right| \cdot \Delta a$$

Zur Vereinfachung wird wieder der relative Fehler gebildet

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{r^2 \bullet (\frac{g}{a} - 1)}{m \bullet r^2 \bullet (\frac{g}{a} - 1)} \bullet \Delta m + \frac{2 \bullet m \bullet r \bullet (\frac{g}{a} - 1)}{m \bullet r^2 \bullet (\frac{g}{a} - 1)} \bullet \Delta r + \frac{(m \bullet r^2 \bullet \frac{g}{a^2}) \bullet \Delta a}{m \bullet r^2 \bullet (\frac{g}{a} - 1)}$$

$$= \frac{\Delta m}{m} + 2 \bullet \frac{\Delta r}{r} + \frac{g}{g - a} \bullet \frac{\Delta a}{a}$$

Es zeigt sich, dass der größte Fehleranteil, nämlich 8% über die Messung von **r** einfließt. Hier muss in erster Linie angesetzt werden, wenn man eine drastische Fehlerverringerung erreichen will (Schieblehre >> Mikrometerschraube).
Der Fehler bei der Massenbestimmung **(Δm** = 5g) trägt nur mit 1% zum Gesamtfehler bei.

4. Lineare Regression (Ausgleichsgerade)

Zwischen den direkt messbaren Größen **x** und **y** bestehe bei Abwesenheit von Messfehlern ein linearer Zusammenhang:

$$y = ax + b$$

a und b sollen dadurch bestimmt werden, dass **n** Wertepaare (x_i, y_i) gemessen werden (x_i, y_i mit zufälligen Fehlern behaftet). Die Bestwerte von **a** und **b** ergeben sich dann mit folgenden Formeln:

$$\bar{a} = \frac{n \bullet \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \bullet \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad \bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \bullet \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \bullet \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Aus den Abweichungen $v_i = y_i - \bar{b} - \bar{a} \bullet x_i$ erhält man den mittleren Fehler der Einzelmessung m zu:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n - 2}}$$

Die mittleren Fehler $\mathbf{m_a}$ von $\bar{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{m_b}$ von $\bar{\mathbf{b}}$ ergeben sich zu:

$$m_a = m \bullet \sqrt{\frac{n}{n \bullet \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}}$$

$$m_b = m \bullet \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \bullet \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}}$$

Derartige Rechnungen werden heute typischerweise elektronisch durchgeführt.

Auch in unserem Praktikum werden diese Schritte von einem Computer übernommen.