Zur Nutzung von Computeralgebra bei mathematischen Anwendungsprojekten für Maschinenbauingenieure

Burkhard Alpers, HTW Aalen
balper@fh-aalen.de

Abstract: In der Mathematikausbildung von Maschinenbauingenieuren an der HTW Aalen werden im dritten Semester von den Studenten mathematische Anwendungsprojekte durchgeführt. Diese befassen sich mit einer Problemstellung z.B. aus den Bereichen Bewegungsdesign, Mechanismenanalyse oder Geometrienachbildung, die einen wesentlichen mathematischen Anteil zur Lösung erfordert, für dessen Bearbeitung das CAS Maple® genutzt wird. Im Beitrag wird vorgestellt, in welcher Weise in den bisherigen etwa 100 Projekten das CAS zur Projektbearbeitung verwendet wurde und welche Probleme, Einsichten und Einstellungen zum CAS als Tool sich dabei ergaben.

1. Einleitung

Computeralgebrasysteme werden in der Mathematikausbildung sowohl in der Schule als auch in der Hochschule in unterschiedlichen Weisen eingesetzt. Zum einen können sie beim ersten Erlernen eines mathematischen Konzepts genutzt werden, wenn zum Beispiel in der Algebra Ausdrücke generiert und manipuliert und dabei Muster erkannt werden oder wenn Familien von Funktionen untersucht werden, um die Bedeutung von Parametern bei gewissen Klassen von Funktionen zu ergründen (vgl. Lagrange 2002, Weigand/Weth 2002). Zum anderen haben Computeralgebrasysteme ihren Platz, wenn es um die Anwendung bereits „bekannter“ mathematischer Konzepte und Prozeduren bei der Bearbeitung von realitätsnahen Aufgaben geht, deren mathematische Durchführung ohne ein CAS nicht denkbar ist (vgl. Henn 1997, Townend/Pountney 1995). Das Adjektiv „bekannt“ wurde dabei in Anführungsstriche gesetzt, da die „Kenntnis“ eines Konzepts ein Begriff mit vielen Schattierungen ist: Kenntnis kann sich auf bloße Definitionen beschränken oder mehr oder weniger reichhaltige Beziehungen zu anderen Konzepten und Anwendungsszenarien und –bedeutungen beinhalten. In diesem Sinne geht es also nach dem „Erstlernen“ um eine Erweiterung und Vertiefung der Kenntnis. Nach Weigand/Weth (2002, S. 35) entspricht dies den didaktischen Prinzipien der „integrierten Wiederholung“ und der Stabilisierung: „Damit ein Schema erlernt wird und verfügbar bleibt ..., sollte es in herausfordernden und anregenden Kontexten immer wieder geübt werden“.
Im vorliegenden Beitrag wird die Rolle des CAS bei der Bearbeitung von mathematischen Anwendungsproblemen ins Blickfeld genommen. Genauer betrachten wir die Nutzung eines CAS durch Studenten des Allgemeinen Maschinenbaus an der Hochschule Aalen, die im dritten Studiensemester ein mathematisches Anwendungsproblem lösen müssen. Seit dem Jahr 2000 haben die Studenten circa 100 solcher Projekte bearbeitet. Die dabei aufgetretenen Nutzungsarten, Probleme und Einstellungen bilden die Datenbasis für diesen Beitrag und sollen im Folgenden systematisch beschrieben und anhand von Beispielen erläutert werden. Es geht im vorliegenden Beitrag also nicht nur um die Potentiale (wie in Henn 1997, Townend/Pountney 1995), sondern vor allem um die beobachtete Nutzung (vgl. Heid et al. 1998, allerdings dort bezogen auf innermathematische Problemlösung durch Lehramtsstudenten). Im nächsten Abschnitt wird zunächst ein Überblick über die Rahmenbedingungen insbesondere bezüglich der Vorkenntnisse gegeben. Der dritte Abschnitt enthält dann die wesentlichen Nutzungsarten, insbesondere die Modelle und Techniken, die Anwendung finden. Abschnitt 4 befasst sich mit den Problemen, die bei der Nutzung auftreten, und mit den Erfahrungen, die die Studenten dabei machen. Abschnitt 5 untersucht schließlich die Einstellungen, die die Studenten bezüglich der CAS-Nutzung entwickeln und die dann auch beeinflussen, ob in der weiteren Ausbildung ein CAS zur Problemlösung verwendet wird. Abschnitt 6 fasst die Ergebnisse zusammen.

2. Rahmenbedingungen

Die Studenten lernen in konventioneller Weise in ihrer mathematischen Grundausbildung wesentliche mathematische Konzepte und Prozeduren (Lineare Algebra, komplexe Zahlen, ein- und mehrdimensionale Analysis, Differentialgleichungen) kennen und bearbeiten Übungsaufgaben dazu. Gleichzeitig erhalten sie eine etwa sechsstündige Einführung in das CAS Maple, wobei sich diese auf wesentliche Dinge wie Gleichungslösung, Funktionsaufstellung und -plot sowie Kurvendiskussion beschränkt. In einer nur zweistündigen Veranstaltung im dritten Semester erfolgt – ebenfalls in konventioneller Vorlesungsweise – eine Einführung in die Numerik (Zahldarstellung, Fehler, lineare Gleichungssysteme, Interpolation, Approximation, DGL). Diese findet vorgezogen im ersten Drittel des Semesters statt. Im Rest des Semesters werden in Gruppen zu dritt oder zu viert umfangreichere Anwendungsprojekte bearbeitet, wobei jede Gruppe ein anderes Thema hat (vgl. dazu auch die ausführlichere Beschreibung in (Alpers 2002) sowie den Anwendungsprojektserver in (Alpers 2003)). Hierbei handelt es sich um eine Anwendungsproblemstellung, zu deren Bearbeitung ein erheblicher mathematischer Teil gehört. Im Gegensatz zu den üblichen Übungsaufgaben sind die Probleme bewusst offener gestaltet. Die Problemstellungen entstammen häufig den Gebieten Bewegungsdesign, Mechanismenanalyse, Maschinenelementberechnung oder Geometrienachbildung. Wir geben im Folgenden einige Beispiele, die dann auch in den weiteren Abschnitten zur Erläuterung verwendet werden. Die Beschreibungen geben im Wesentlichen den Arbeitsauftrag an die Studenten wieder.

<u>Scheibenwischergetriebe</u>: Erstellen Sie ein Berechnungsworksheet, mit dem man die Bewegung der Getriebeglieder eines handelsübliches Wischergetriebe (nach Christen/Ruthardt 2000) berechnen kann. Bauen Sie auch ein kleines Modell.
<u>Bewegung um Hindernisse</u>: Eine gegebene Skizze zeigt, wie sich ein Körper (vereinfacht als Kreis mit Durchmesser 3cm) ungefähr um Hindernisse bewegen soll. Berechnen Sie eine Bewegungsbahn, wobei die (stetige!) Krümmung nicht größer sein darf als 0,3 und die Bewegungsbahn möglichst kurz sein soll. Erstellen sie eine Animation in Maple und fahren Sie die Bewegung auf einer 3-Achsenmaschine ab.
<u>BMW-Motorhaube</u>: Vermessen Sie die BMW-Motorhaube im Maschinenlabor und erzeugen Sie ein Splinekurvendrahtmodell in Maple (für eine Richtung). Lesen Sie die Messpunkte auch als IBL-Datei in Pro/Engineer ein, erzeugen Sie dort eine Fläche und fräsen Sie ein kleines Modell auf der 5-Achsenmaschine.
<u>Bahngeschwindigkeit</u>: Gegeben ist die Skizze einer Bewegungsbahn. Berechnen Sie unter realistischen Annahmen zur Haftreibung die Maximalgeschwindigkeit in jedem Bahnpunkt, so dass ein Auto mit dieser Geschwindigkeit gerade noch in der Bahn bleiben würde, ohne zu rutschen. Dabei soll eine realistische Höchstgeschwindigkeit nicht überschritten werden. Erstellen Sie auch eine Animation.
<u>Schraubverschluß</u>: Es soll ein Worksheet in Maple erstellt werden, mit dem man die Schraubverbindung eines Zylinders mit Deckel, der unter Innendruck steht, berechnen kann. Anhand der Ergebnisse soll ein Modell gefertigt werden, an dem die Theorie in einem praktischen Versuch bestätigt wird (Dichtigkeit bei 5bar, Undichtigkeit bei 6-7 bar).
<u>Gegenflanke</u>: Erstellen Sie ein Maple-Worksheet, mit dem man bei gegebener Zahnflanke die Gegenflanke berechnen kann, so dass das Verzahnungsgesetz (vgl. Decker 2001, S. 487) eingehalten wird. Wenden Sie dies mit einer Evolvente als Beispiel an.
<u>Laserfertigung</u>: Ein Laserimpuls schießt aus dem Material ein rechteckiges Stück mit gewisser Höhe und Breite heraus. Berechnen Sie eine Impulsfunktion, so dass die erzeugte Treppenkontur möglichst gut mit einer vorgegebenen Kontur ($f(x)=\sin(\pi/2*x)+1$) übereinstimmt. Stellen Sie ein Modell mit der wahren Kontur und der Näherungskontur her.
<u>Flügelzellenpumpe</u>: Erstellen Sie ein Worksheet, mit dem man die Bewegungsfunktion der Flügellamellen in Abhängigkeit vom Hub und Verdichtungsphase aufstellen und den dazu gehörigen Kurvenring berechnen kann.
<u>Bremsrampe</u>: (nach Edwards/Hamson 2001) Ein Fahrzeug fährt über eine Rampe (Skizze gegeben). Modellieren Sie das Fahrzeug als gedämpften Einmassenschwinger und die Rampe durch eine geeignete Funktion. Wie verhält sich das Fahrzeug, wenn mit konstanter Geschwindigkeit über die Rampe gefahren wird. Testen Sie verschiedene Dämpfer. Erstellen Sie eine einfache Animation in Maple.

Für zwei Stunden pro Woche steht ein studentischer Tutor zur Verfügung, der insbesondere elementare Fragen im Umgang mit dem CAS Maple® klärt. Zur Wiederauffrischung der Maple-Kenntnisse und zur Erläuterung häufig genutzter Prozeduren (z.B. Einlesen und

Schreiben von Dateien, Erstellung einer Animation, Schleifenerstellung etc.) dienen spezielle Worksheets. Auch wird auf die gute Übersicht über die Nutzung von Maple-Kommandos zur Bearbeitung gewisser Probleme in (Westermann 2003) verwiesen. Für kompliziertere CAS-Probleme und für inhaltliche Projektfragen suchen die Studenten den Verfasser auf. Maple-Probleme werden direkt am Rechner besprochen, da man als Betreuer meist nur dort die Ursachen erkennen kann.

Die Ausführungen in den folgenden Abschnitten beruhen auf Erfahrungen mit circa hundert Projekten. Einschränkend muss aber vermerkt werden, dass der Verfasser die Studenten nicht permanent bei der Arbeit beobachtet, sondern nur bei Problemen und natürlich beim letztendlichen Resultat intensiveren Einblick in den studentischen Denkprozess erhält. Es handelt sich um die Überlegungen eines reflektierenden Praktikers und nicht, wie etwa in (Heid et al. 1998), um eine wissenschaftliche Studie.

3. CAS-Nutzung: Eingabe und Arbeit mit Modellen

Bei den Anwendungsprojekten steht zunächst – noch vor jedweder Technologienutzung – die mathematische Modellierung im Vordergrund (ebenso in Henn 1997, Townend/Pountney 1995), wobei als Modellierungsmittel mathematische Konzepte aus der Mathematikausbildung der beiden ersten Semester oder aus der zuvor behandelten Numerik dienen. Natürlich tauchen bei einem Problem immer nur wenige Konzepte auf, so dass es sich hier um eine exemplarische Vorgehensweise handelt. Was die Modellierung anlangt, so sind zwei Arten von Projekten zu unterscheiden:

- Projekte, in denen die Studenten die mathematischen Modelle selbst entwickeln müssen, wie z.B. beim oben beschriebenen Scheibenwischerprojekt;
- Projekte, in denen eine vorhandene Modellierung verstanden und angewendet werden muss, wie z.B. bei den Maschinenelementprojekten oder aber auch bei den Kurvennachbildungen mit Splines (wobei hier noch Randbedingungen geeignet zu modellieren sind).

Modellbildung einerseits und Modellaufstellung und -berechnungen im CAS andererseits sind nicht immer rein konsekutive Schritte. Vielmehr zeigt sich, dass Berechnungsschwierigkeiten im CAS oder unbefriedigende Ergebnisse eine Modellveränderung und eventuell die Arbeit mit Näherungsmodellen notwendig machen können.

Steht eine erste Modellierung, so müssen die Studenten das Modell im CAS umsetzen, d.h. sie müssen planen, mit welchen CAS-Mitteln die Berechnungen durchzuführen sind (vgl. Weigand/Weth 2002). Um im CAS mit dem Modell arbeiten zu können, müssen – soweit vorhanden – die Modelldaten eingegeben und die Modelldatenstrukturen erstellt werden. Die Dateneingabe erfolgt sinnvollerweise durch Zuweisung zu Symbolen und ggf. durch Einlesen.

Bei der Aufstellung des Modells können sich unterschiedliche Situationen ergeben:

- Die Modellobjekte lassen sich unmittelbar im CAS spezifizieren wie z.B. Modellgleichungen, Differentialgleichungen oder Funktionen.
- Die Modellobjekte lassen sich mithilfe einer Prozedur unmittelbar erstellen wie z.B. Splinefunktionen aus gewissen Eingangsdaten.
- Zur Aufstellung der Modellobjekte sind zunächst Berechnungen notwendig, die eine eigene Überlegung und Planung erfordern, wie zum Beispiel die Aufstellung von Funktionen, von denen zunächst nur einzelne „Stücke“ bekannt sind.
- Das Modell ist ein Algorithmus für gewisse Eingangsdaten, der in seinen einzelnen Schritten im CAS vollzogen werden muss; dies ist beispielsweise bei den Projekten Gegenflanke und Schraubverschluß der Fall.

Ist das Modell aufgestellt, so ist die Durchführung der Berechnungen unter Zuhilfenahme der CAS-Möglichkeiten zu planen. Dabei sind natürlich zumindest grobe Kenntnisse der elementaren CAS-Befehle erforderlich. Im operativen Umgang mit den Befehlen und den dabei auftretenden Wahlmöglichkeiten und Problemen entwickelt sich dann ein tieferes

Verständnis sowohl der mathematische Konzepte als auch ihrer Umsetzung im CAS (vgl. auch Weigand/Weth 2002). Teilweise sind die Algorithmen schon in Papierform (etwa in einem Maschinenelemente-Buch wie Decker 2001) vorgegeben, aber die Umsetzung im CAS erfordert die Kenntnis, die Anwendung und den Umgang mit entsprechenden mathematischen Objekte und Operationen und unterscheidet sich dadurch wesentlich von einem bloßen Eingeben von Parametern in Simulationsumgebungen (Weigand/Weth 2002).

Sind gewisse Berechnungsergebnisse erzielt worden, so sind diese zu interpretieren und zu prüfen. Dies kann unter Zuhilfenahme von CAS-Möglichkeiten oder externen Objekten geschehen. CAS-intern bietet sich bei berechneten Funktionen oder geometrischen Objekten der Plot oder die Animation an. Extern könnte man etwa vergleichbare Aktionen in einem CAD oder Maschinenelement-Berechnungsprogramm durchführen oder etwa reale Messungen vornehmen.

Sind die Berechnungsergebnisse korrekt, aber nicht zufrieden stellend, etwa weil eine Restriktion nicht eingehalten wurde oder ein Gütekriterium noch unzulänglich berücksichtigt ist (etwa beim Projekt „Bewegung um Hindernisse“ Krümmung und Länge), ist mit dem Worksheet zu experimentieren, indem Daten variiert werden. Daten können dabei Parameter wie Dämpfungskonstanten (Projekt „Bremsrampe“) oder Schraubgrößenwahl (Projekt „Schraubverschluß“) oder Punkte, durch die eine Splinekurve gelegt wird, sein. Um zielgerichtet experimentieren zu können, müssen die Projektbearbeiter ihr Modellverständnis nutzen oder verbessern. Erfolgt die Untersuchung von Korrektheit und Güte mithilfe eines Plots, so ist auch durch die Verknüpfung der Darstellungsformen ein reichhaltigeres Verständnis zu erreichen (vgl. (Weigand/Weth 2002), (Heid et al. 1998)). Die Experimentier-anforderung hat auch einen erheblichen Einfluß auf die Nutzung des CAS. Wird anfänglich häufig eher auf den schnellen Erfolg hin gearbeitet, wobei z.B. Parameter direkt (und mehrfach) in Gleichungen eingegeben und Ergebnisse mit „copy and paste“ in andere Maple-Kommandos kopiert werden, so versuchen die Studenten zum einfachen Experimentieren ihr Worksheet so zu gestalten, dass nur am Anfang gewisse Symbole (mit Werten, Listen, Funktionen, ...) neu zu besetzen sind und dann das gesamte Worksheet auf Knopfdruck neu ausgeführt werden kann. Dabei erscheinen dann auch die wesentlichen Schritte bei der Durchführung klarer als Operationen auf Objekten (vgl. Heid 2002).

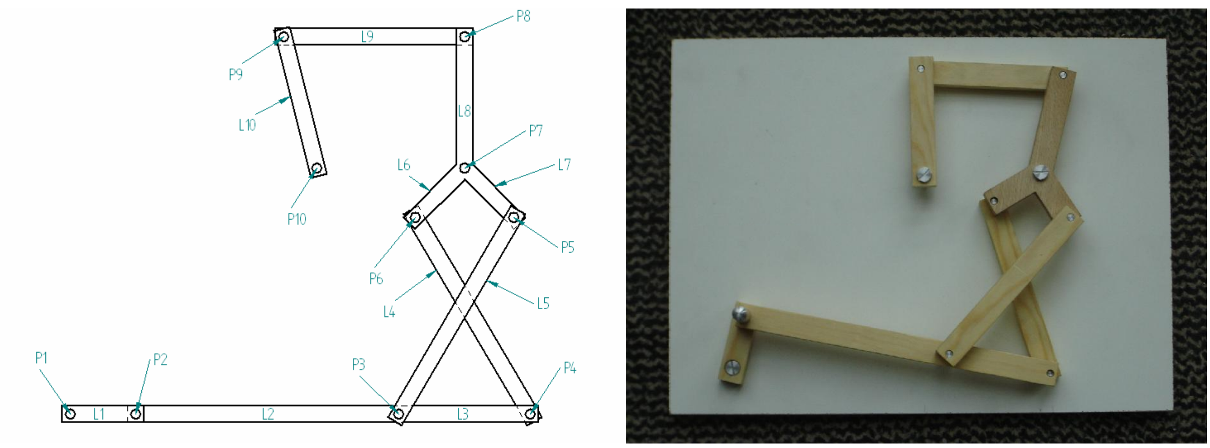

Bild 1: Scheinwischergetriebe

Die oben umrissenen Nutzungssituationen sollen im Folgenden an einigen der genannten Projekte erläutert und illustriert werden. Sämtliche Bilder und Plots sind den Dokumentationen der Projektgruppen entnommen.

Beim Scheibenwischergetriebe liegt das im Bild 1 gezeigte Schema zugrunde, wobei P1, P7 und P10 fest gelagerte Drehgelenke und die anderen Punkte bewegliche Drehgelenke sind. Der Antriebsmotor dreht den Stab l1 um P1 und der Scheibenwischer ist in der Mitte von l9 befestigt. Letztendlich sollen die Koordinaten des Befestigungspunktes in Abhängigkeit vom

Drehwinkel α des Antriebsmotors bestimmt werden. Eine sehr einfache, zunächst von der Projektgruppe durchgeführte Modellierung bestimmt die Koordinaten von P2 in Abhängigkeit von α. Die Positionen der übrigen beweglichen Punkte P3 bis P6, P8 und P9 (12 Unbekannte) wird durch die Längen festgelegt: die festen Stablängen l2 bis l10 liefern zunächst 9 Gleichungen. Da P4 den Abstand l2+l3 von P2 hat (es handelt sich um einen Stab, auf dem ein weiteres Drehgelenk angebracht ist) und die Abstände zwischen P5 und P6 bzw. P5 und P8 auch fest sind (es handelt sich um ein Getriebeglied das in P7 gelagert ist), erhält man drei weitere Gleichungen. Bei der Eingabe des Modells in Maple wurden die Symbole l1 bis l13 numerisch besetzt und die Gleichungen mithilfe der Symbole l1 bis l10 für die Längen und P1x bis P10x bzw. P1y bis P10y für die Gelenkkoordinaten eingegeben. Zur Bearbeitung der eigentlichen Fragestellung war das Gleichungssystem zu lösen. Maple bietet dafür das Kommando solve zum exakten symbolischen Lösen und fsolve mit der Möglichkeit der Angabe von Suchbereichen zum numerischen Lösen.

Sowohl solve als auch fsolve liefern jedoch kein Ergebnis, selbst wenn bei fsolve Bereiche für die Unbekannten angegeben werden, die eine Lösung enthalten und nicht „allzu groß" sind. Da die Studenten keinerlei Informationen über die Arbeitsweise der Kommandos haben, kommen Sie an dieser Stelle nicht weiter und wenden sich an den Verfasser. Es zeigt sich, dass das Programm das eingegebene Gleichungssystem trotz eingegrenzten Suchbereichs nicht lösen kann, dass eine „naive" Nutzung des Programms also nicht zum Ziel führt. Da es sich um ein größeres nicht-lineares System handelt, kann man versuchen, das System zu reduzieren und zu entkoppeln, wobei wieder mathematisches Können gefordert ist. So kann man das System in zwei Teile auftrennen: Das erste System besteht aus den Gliedern, auf denen die Längen l1 bis l8 liegen, d.h. man fragt sich zunächst, um welchen Winkel γ sich das Glied bestehend aus l6, l7 und l8 dreht, wenn man am Antrieb um den Winkel α dreht. Führt man γ als Unbekannte ein, so kann man auf die Koordinaten von P5, P6 und P8 als Unbekannte verzichten. Ferner kann man P4 mit Hilfe von P2 und P3 ausdrücken. Es bleiben dann nur noch γ, P3x und P3y als Unbekannte und Maple kann das System lösen. Schließlich betrachtet man den Zweischlag aus l9 und l10, der ebenfalls mit Maple über die entsprechenden Gleichungen berechnet werden kann.

Ist die Lösung für einen Antriebswinkel α berechnet worden, so ist die Berechnung für weitere Winkel erneut durchzuführen. Hier zeigt sich dann, ob das Worksheet „anpassungfreundlich" erstellt wurde, man also einfach einen anderen Wert für α vorgeben und das Worksheet erneut durchlaufen lassen kann. Probleme können sich beispielsweise ergeben, wenn die Unbekannten nach der Lösung des ersten Systems zugewiesen („assigned") worden sind und dann beim zweiten Durchlauf nicht mehr Unbekannte sind. Ferner kann es natürlich auch Probleme mit den Suchbereichen im fsolve-Befehl geben, da auch diese eventuell angepasst werden müssen. Man könnte hier etwa auch die Suchbereiche dynamisch gleiten lassen. Will man das Durchlaufen für eine Reihe von Winkelstellungen automatisieren, so muss man eine Schleife einbauen, wobei sich die Frage stellt, was innerhalb und was außerhalb der Schleife zu tun ist. Es ist jedenfalls ersichtlich, dass sich auch beim Problem des mehrmaligen Durchlaufs interessante Fragen und Aufgaben ergeben.

Bei den Projekten „BMW-Motorhaube", „Bahngeschwindigkeit" und „Bewegungsbahn um Hindernisse" geht es um die Bildung von Spline-Funktionen bzw. Splinekurven. Die Eingangsdaten stammen aus Messungen bei den ersten beiden Projekten bzw. von eigenen Vorgaben beim Erstentwurf der Bewegungsbahn. Die erste Entscheidung, die zu treffen ist, besteht darin, zwischen Funktion und Kurve auszuwählen. Lässt sich eine Kontur ohne Rückläufigkeit bilden, so reicht eine Funktion zur Modellierung. Die zusätzliche Schwierigkeit bei Kurven besteht darin, dass man sich zunächst Ersatzparameter beschaffen muss. Denn sind nur Punkte (x_i,y_i) vorgegeben , so benötigt man für die Splinekurve in Parameterdarstellung noch Parameterwerte t_i, so dass man zu den Paaren (t_i,x_i) bzw. (t_i,y_i) die Koordinatenfunktion x(t) bzw. y(t) als Splinefunktion erstellen kann. Eine einfache

Parameterbeschaffung liefert die so genannte „chordale Parametrisierung“, bei der die Bogenlänge des Polygonzugs vom ersten Punkt zum i-ten Punkt als Parameterwert des i-ten Punktes genommen und damit annähernd eine Bogenlängenparametrisierung vorgenommen wird. Diese Sachverhalte (und auch die in Maple angebotene Spline-Prozedur) werden in der vorgezogenen Mathematik III-Vorlesung besprochen, aber es zeigt sich immer wieder, dass erst die intensive eigene Beschäftigung und Umsetzung zu einem tieferen und dauerhafteren Verständnis führt.

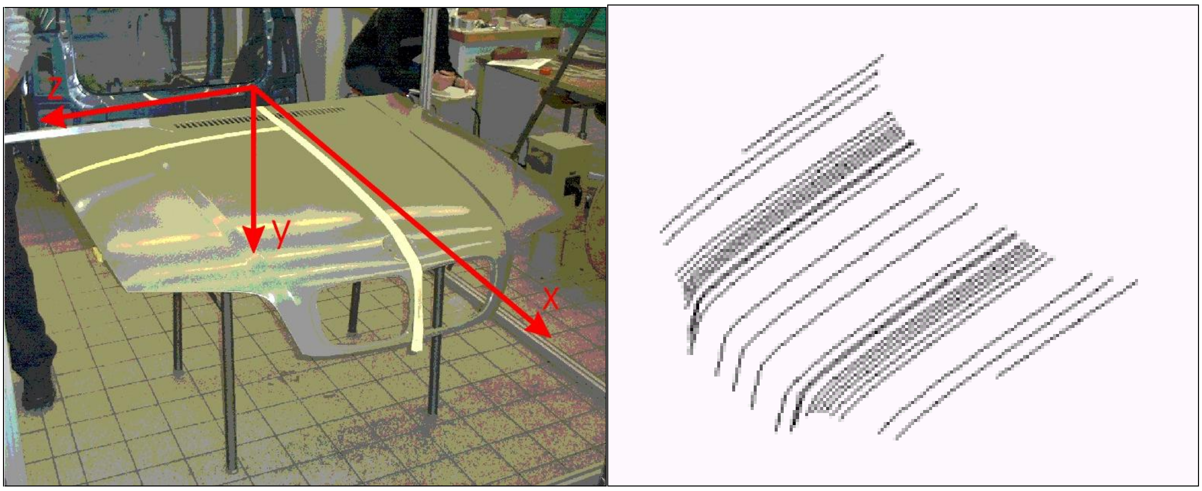

Bild 2: BMW-Motorhaube: Reales Objekt und Drahtmodell

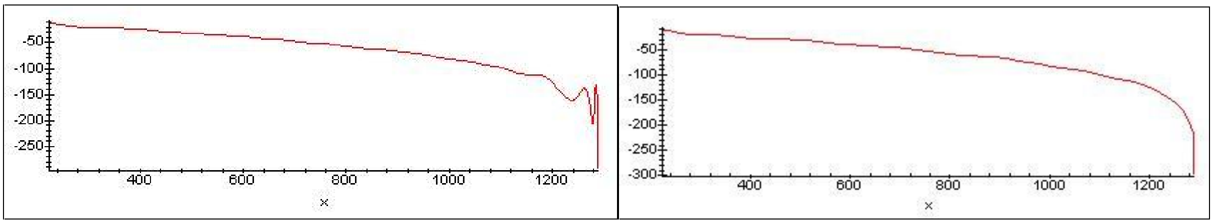

Bild 3: Verbesserung eines Querschnittsplines durch Hinzufügen von Punkten

Bei der Spline-Prozedur muss die Verbindung zwischen mathematischen Konzepten und Syntax hergestellt werden und die Eingangsdaten müssen in geeigneter Form erstellt werden. Dazu sind bei der chordalen Parametrisierung Abstände zu berechnen, wobei bei einer Vielzahl von Punkten eine Schleifenimplementierung nahe liegt. Es gibt aber auch immer Studenten, die mit „copy and paste“ alle Berechnungen einzeln durchführen.
Die Spline-Prozedur hat folgende Syntax:

```
> Spline(Liste mit Punkten, Variablenname, degree=Grad, endpoints=Randbedingung);
```

Hier handelt es sich also um eine relativ komplexe Prozedur. Mit der Option „degree“ kann man den Polynomgrad festlegen, die Option „endpoints“ erlaubt es, die verbleibenden Freiheitsgrade in gewisser Weise zu nutzen (u.a. natürliche und periodische Splines oder Splines mit vorgegebenen Randableitungen). Hier ist auch der Zusammenhang zwischen Grad und Anzahl der Freiheitsgrade bei den Randbedingungen zu bedenken. Wird – wie dies meistens der Fall ist – der Grad 3 genommen, so hat man noch zwei Freiheitsgrade. Will man geschlossene glatte Kurven bilden, so sind periodische Splines für die Koordinatenfunktionen zu nehmen. An diesen Beschreibungen ist schon zu erkennen, dass bei der sinnvollen Nutzung der Splineprozedur eine intensivere Beschäftigung mit der mathematischen Bedeutung der Daten erforderlich ist. Die Prozedur übernimmt dann die „Rechenarbeit“, wobei man am symbolischen Output erkennt, dass eine Splinefunktion eine Aneinandersetzung von

Polynomen ist. Verborgen bleibt die Berechnung durch Umsetzung der Bedingungen in lineare Gleichungen und deren Lösung. War die Spline-Prozedur erfolgreich, so dient der Plot (Wechsel der Darstellungsform) zur Ermittlung von Korrektheit und Güte. Hier zeigt sich etwa, dass man mehr Interpolationspunkte benötigt, um auch in der Realität nicht vorhandene Dellen zu vermeiden. Ferner sind in Bereichen großer Krümmung mehr Punkte zu wählen. Die Studenten erstellen sich also wieder eine Experimentierumgebung, wobei sich auch hier die Frage der einfachen Veränderbarkeit stellt. Wird etwa ein neuer Punkt in die Liste der Interpolationspunkte eingefügt, so sollte möglichst wenig bei der erneuten Berechnung zu verändern sein. Wird z.B. bei der Schleife zur Parameterwertbestimmung nicht ein numerischer Wert (Anzahl der Punkte in der Liste) als obere Grenze des Schleifenindex verwendet, sondern die Anzahl dynamisch mit dem Kommando „nops(Liste)“ (nops=number of operands=Anzahl der Listenelemente) ermittelt, so sind keine Änderungen nötig.

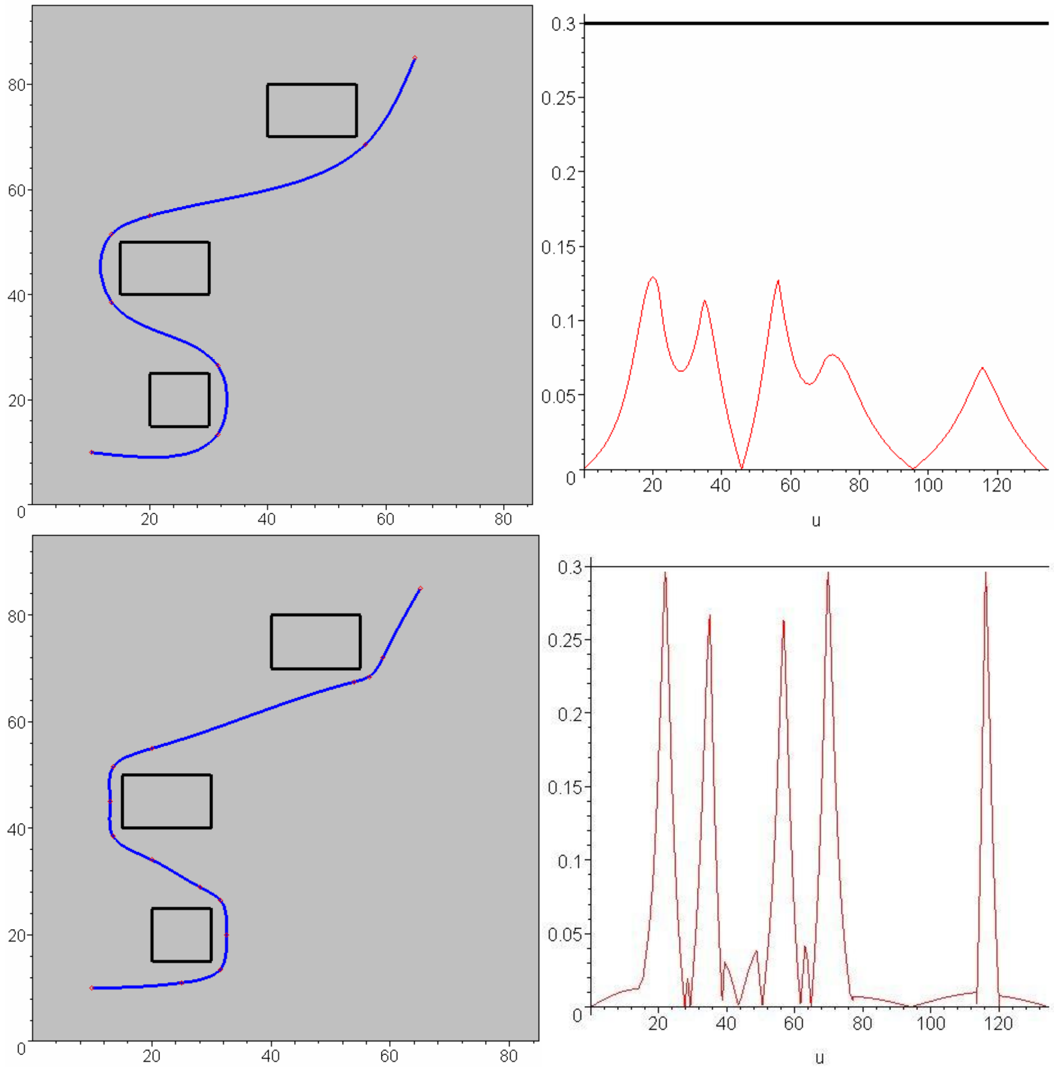

Bild 4: Bewegung um Hindernisse: Erster Entwurf (Zeile 1) und Endergebnis (Zeile 2)

Beim Projekt „Bewegungsbahn um Hindernisse“ ist dann die Krümmung zu berechnen. Hier müssen die Studenten die Krümmungsformel implementieren, die die ersten und zweiten Ableitungen der Koordinatenfunktionen enthält. Dazu stellt Maple das diff-Kommando zur Verfügung, so dass sich die Studenten auf das Zusammensetzen der Ergebnisse konzentrieren können. Der Krümmungsausdruck wird so unübersichtlich, dass hier der symbolische Output keinen Wert hat, also die Grenzen des symbolischen Feedbacks erreicht sind. Beim

Differenzieren der Splinefunktionen ergibt sich bei Maple zusätzlich das Problem, dass der Ableitungswert an den Zusammensetzstellen als „undefined" angegeben wird, was natürlich sofort zu Bedenken der Studenten führt, ob sie denn irgendwo etwas fehlerhaftes gemacht hätten. Denn ein kubischer Spline soll ja gerade stetig in den ersten und zweiten Ableitungen sein. Dies kann als Ausgangspunkt einer Diskussion über die Grenzen eines solchen Programms bei numerischen Werten führen (Wie soll Maple die Gleichheit von linkseitiger und rechtsseitiger Ableitung bei numerischen Berechnungsungenauigkeiten ermitteln?). Man kann diese Eigenschaft des abgeleiteten Splines aber auch einfach ignorieren, da man auch mit der an den Zusammensetzstellen undefinierten Funktion weiterarbeiten kann, etwa Plotten der Krümmung zur Untersuchung der Einhaltung der vorgeschriebenen Restriktion oder Längenberechnung der Kurve in Parameterdarstellung mit dem Integral. Beim Krümmungsplot ist nach der maximalen Krümmung zu schauen, ohne dass man hier eine Extremwertrechnung durchzuführen bräuchte. Die Projektaufgabe könnte natürlich auch als restringierte Optimierungsaufgabe formuliert werden, aber dies würde sowohl die Studenten als auch Maple überfordern. Auch in der praktischen Ingenieursarbeit wird häufig nicht im mathematischen Sinne optimiert, sondern solange aufgrund des Feedbacks eine Verbesserung durchgeführt, bis die Ergebnisse akzeptabel sind.

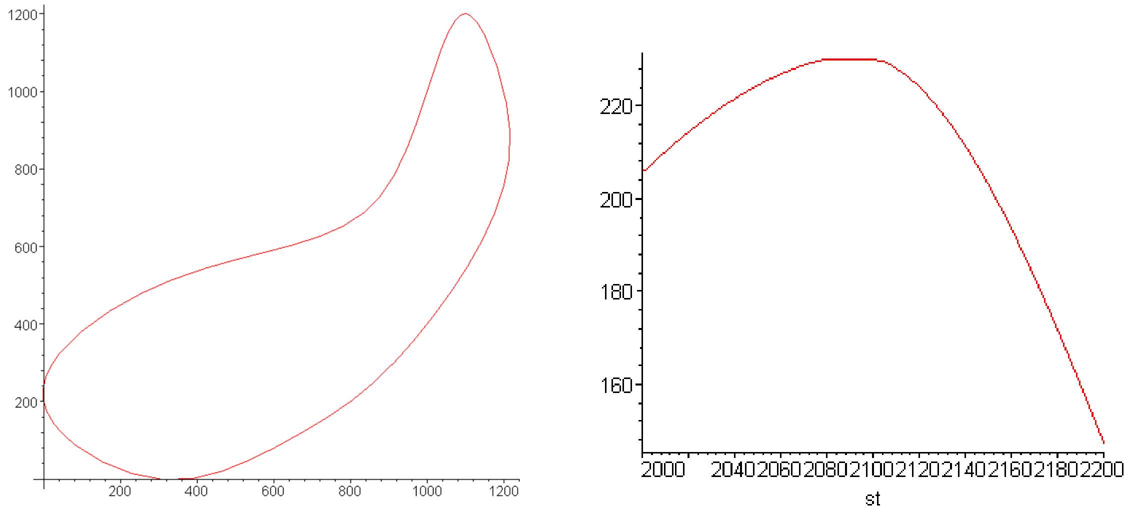

Bild 5: Bahngeschwindigkeit: Bahn und Teil von v(s) mit beschränkter Geschwindigkeit

Beim Projekt „Bahngeschwindigkeit" kommt noch die Bestimmung der Fahrfunktion v(s) hinzu. Da die Zentrifugalkraft von der Krümmung abhängt, ist diese auch hier zu bestimmen. Weil die maximale Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Krümmung ist, ergeben sich bei der Berechnung der theoretischen Maximalgeschwindigkeit Polstellen. Es ist zu ermitteln, an welchen Stellen eine realistische Höchstgeschwindigkeit überschritten wird. Dies kann mit fsolve erfolgen. Dann wird die Datenstruktur für die stückweise Bestimmung der Funktion (die Krümmung ist ja stückweise definiert!) so manipuliert, dass bei Intervallen, in denen die Maximalgeschwindigkeit überschritten wird, ein neuer Abschnitt mit konstanter Höchstgeschwindigkeit eingesetzt wird (siehe Bild 5). Dies geht im Wesentlichen mit „copy and paste", wobei man natürlich die Datenstruktur der stückweise definierten Funktion verstehen muss.

Bei den Projekten „Schraubverschluß" und „Gegenflanke" geht es um die Berechnung oder Auslegung von Maschinenelementen (Schraubverbindungen, Zahnräder). Hier gibt es in entsprechenden Lehrbüchern (z.B. Decker 2001) Vorgehensweisen (Algorithmen) zur Durchführung der Berechnung. Die einzelnen Rechenschritte sind wie etwa bei der Schraubverbindung recht einfach, die Komplexität entsteht durch die Vielzahl der Variablen, die gemäß ihrer Anwendungsbedeutung auch nur gewisse Werte annehmen können. Ohne dass man auf die Einzelheiten eingehen müsste, vermittelt Bild 6 einen guten Eindruck von der Vorgehensweise, wobei am Ende die Berechnung der Restklemmkraft F_{KL} (Block 1) steht. Die Formeln können unmittelbar in Maple umgesetzt werden (allerdings auch in Excel), womit man wiederum eine geeignete Experimentierumgebung hat. Beim symbolischen Programm kann man auch einfach eine oder mehrere Größen unbesetzt lassen und die Endgröße als Funktion der unbesetzten Größen untersuchen, etwa durch einen Plot (bei ein oder zwei Variablen). So kann das Finden geeigneter Werte deutlich beschleunigt werden.

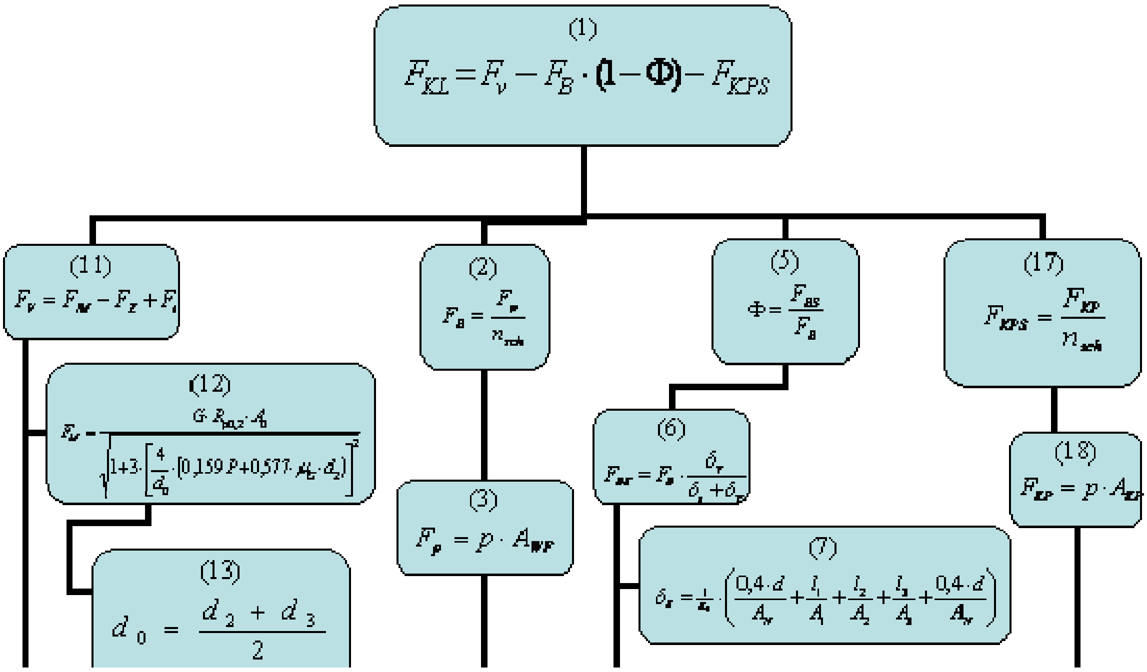

Bild 6: Ausschnitt au dem Organigramm zur Formelorganisation bei der Schraubenberechnung

Beim Projekt „Gegenflanke" ist die Situation insofern anspruchsvoller, als dass zu den Eingangsdaten jetzt auch eine Kurve in Parameterdarstellung gehört (die Ausgangsflanke). Auch sind im Algorithmus das Schneiden von Normalen an die Flankenkurve mit Wälzkreisen und das Drehen von Punkten enthalten, d.h. es handelt sich nicht nur um eine einfache Formelauswertung wie im Projekt „Schraubverschluß". Hier sind wieder die CAS-Möglichkeiten zum Bestimmen von Ableitungen zur Normalenberechnung sowie zum Lösen von Gleichungen beim Schnitt von Kurven einzusetzen. Dabei ist die Symbolik sehr schnell an ihre Grenzen gelangt, so dass man die Gegenflanke in Einzelpunkten berechnen muss. Natürlich ist nicht garantiert, dass solch ein Berechnungsworksheet für alle Eingaben von Flankenkurven funktioniert, aber es sollte immerhin so gestaltet sein, dass es nicht auf eine konkrete Flanke beschränkt ist.

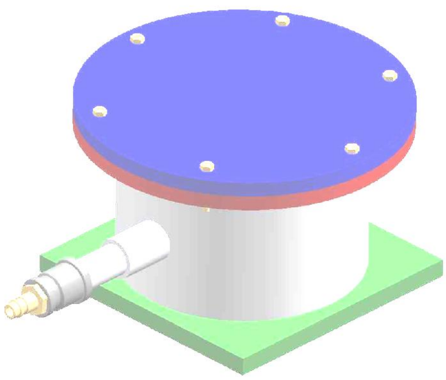
Bild 7: Behälter mit Schraubverschluss

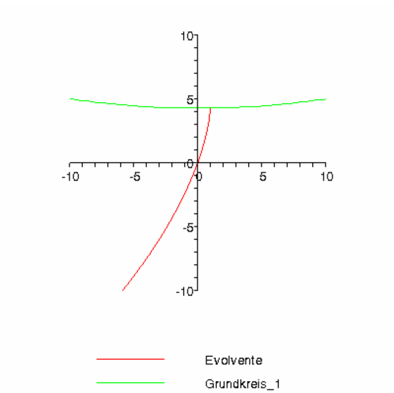

Bild 8: Grundkreis mit Evolventenflanke

Bei den Projekten „Laserfertigung“ und „Flügelzellenpumpe“ wird das CAS in unterschiedlichen Weisen zur Konstruktion von Funktionen genutzt. Bei der Laserfertigung sind die Pulse als Funktion zu modellieren, wobei Pulsbreite und –höhe festgelegt sind und nur die Position (unten festgelegt durch die Variable a) frei ist. Dies lässt sich mit Hilfe von stückweise definierten Funktionen oder – wie unten – mit der bereits vorhandenen Heaviside-Funktion realisieren:

```
> puls:=(x,a)->0.1*Heaviside(x-a)-0.1*Heaviside(x-(a+0.2));
```

Eine Impulsfunktion ist dann einfach eine Überlagerung solcher Pulsfunktionen. Die Anregung, zunächst einen Puls und dann daraus die Impulsfunktion zu bilden, hat der Verfasser in der Diskussion mit der Projektgruppe gegeben. Die Projektgruppe hat beim Experimentieren z.B. folgende Impulsfunktion erstellt:

```
> Gesamte_Impulsfunktion:= 2-
(1*puls(x,AL)+1*puls(x,BL)+1*puls(x,CL)+1*puls(x,DL)+2*puls(x,EL)+1*puls(x,FL)+1*puls(x,GL)+1*puls(x
,HL)+3*puls(x,IL)+2*puls(x,JL)+2*puls(x,KL)+2*puls(x,LL)+4*puls(x,ML)+10*puls(x,NL)+3*puls(x,OL))-
(1*puls(x,AR)+1*puls(x,BR)+1*puls(x,CR)+1*puls(x,DR)+2*puls(x,ER)+1*puls(x,FR)+1*puls(x,GR)+1*puls(
x,HR)+3*puls(x,IR)+2*puls(x,JR)+2*puls(x,KR)+2*puls(x,LR)+4*puls(x,MR)+10*puls(x,NR)+3*puls(x,OR)):
```

Dabei sind AL, BL, CL, ... bzw. AR, BR, CR, ... die Pulsanfänge, die den linken bzw. den rechten Bereich der symmetrischen Kontur entfernen (2- am Anfang bedeutet, dass die Pulse von oben herunterschießen). Die Faktoren vor den Pulsfunktionen geben die Anzahl der Pulse von einer bestimmten Position wieder.

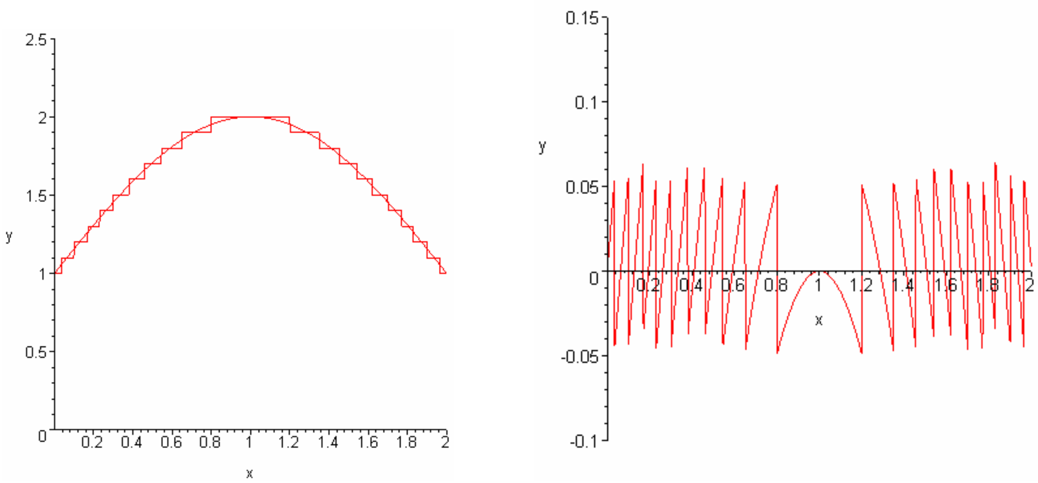

Bild 9: Originalfunktion mit Impulsfunktion, Plot der Abweichungen

Die Projektgruppe hat nach einigem Probieren die heuristische Idee entwickelt, eine möglichst gute Annäherung „zeilenweise“ zu ermitteln. Dabei wird, von der Mitte ausgehend, der erste Puls so gesetzt, dass die Mitte der Pulshöhe in etwa auf der Kurve liegt. Dann wird der Rest der Zeile vom Laser eliminiert. Dies führt zum oben dargestellten Ergebnis. Zur Bewertung der Güte der Annäherung wurden zwei Varianten diskutiert: die maximale Abweichung oder das Integral der quadrierten Differenzfunktion (in Anlehnung an die Methode der kleinsten Quadrate im Diskreten). Die maximale Abweichung wird wieder nur durch Betrachtung des Differenzplots ungefähr ermittelt, für das Integral steht das entsprechende CAS-Kommando zur Verfügung. Aufgrund der Vorgehensweise liegt der maximale Fehler ungefähr bei einer halbe Pulshöhe. Beim Plot ist übrigens im Allgemeinen auf die Auflösung zu achten, da sonst Spitzen „verschluckt“ werden können.

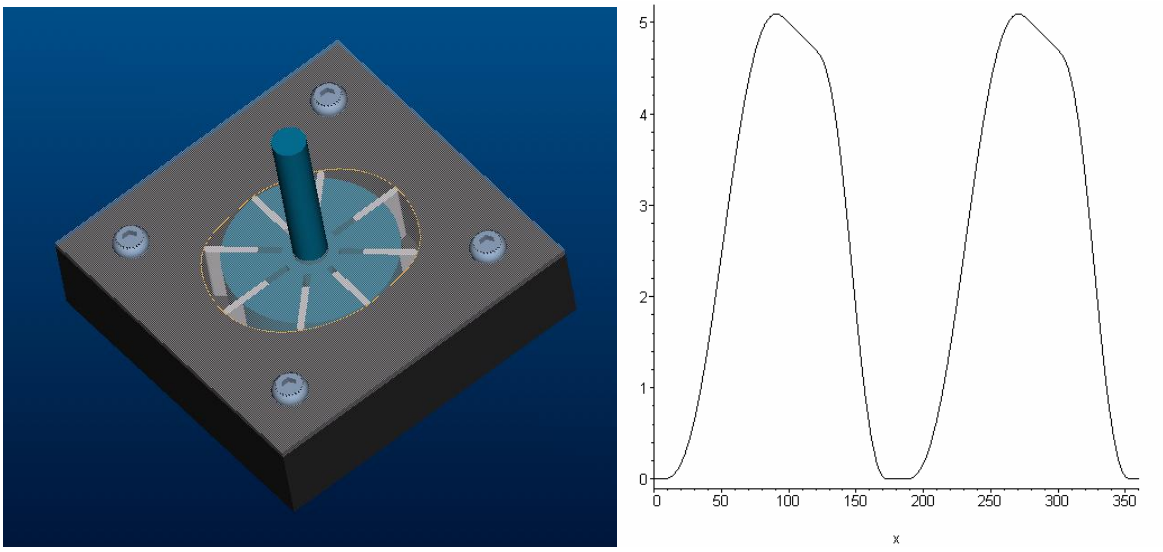

Bild 10: Flügelzellenpumpe: Modell und Hubfunktion der Lamellen

Beim Projekt „Flügelzellenpumpe“ ist eine Umgebung zu erstellen, in der zunächst flexibel eine Hubfunktion für eine Lamelle berechnet werden kann. Dabei soll die Lamelle von einer Nullposition aus auf die maximale Position herausgeschoben werden, was hydraulisch oder mit Feder geschieht. In dieser Phase wird die Flüssigkeit durch Volumenerweiterung angesaugt. Dann erfolgt in einem Geradenabschnitt mit negativer Steigung eine Verdichtung, bevor zum Herausdrücken der Flüssigkeit der Lamellenhub auf 0 zurückgefahren wird und nach kurzem Verweilen derselbe Vorgang auf der anderen Seite erneut abläuft. Hier sollen Anfangs- und Endpunkt des Geradenabschnitts frei vorgebbar sein, wozu entsprechende Symbole im Worksheet vorgesehen sind. Für die Abschnitte von der Nulllage zum Geradenanfang und vom Geradenende zur Nulllage werden Polynome 5. Grades verwendet, so dass man die Stetigkeit der Funktion bis zur zweiten Ableitung gewährleisten kann. Im CAS wird mit einem allgemeinen Polynom 5.Grades angesetzt und dann werden zur Berechnung der Koeffizienten entsprechende Gleichungen gebildet, wozu auch Polynomableitungen zu bilden sind. Das entsprechende lineare Gleichungssystem wird mit Maple gelöst. Schließlich dient das „piecewise“-Konstrukt zur stückweisen Zusammensetzung der Gesamtfunktion, die bei der Projektgruppe folgendermaßen aussah:

```
> ff1:=x->piecewise(x<=x1,0, x<=x2,a*x^5+b*x^4+c*x^3+d*x^2+t*x+f,
x<=x3,Einzugsgerade,x<=x4,g*x^5+h*x^4+j*x^3+k*x^2+l*x+m,
x<=x5,0,x<=x11,0,x<=x22,n*x^5+o*x^4+p*x^3+q*x^2+r*x+s,
x<=x33,Einzugsgerade2,x<=x44,aa*x^5+bb*x^4+cc*x^3+dd*x^2+ee*x+ff,x<=x55,0):
```

Dabei sind die Polynomkoeffizienten vorher berechnet und zugewiesen worden. Hat man die Hubkurve erzeugt, so ist der Kurvenring zu berechnen. Die Lamellen sind am Ende halbkreisförmig abgerundet. Man bestimmt, ausgehend von einem frei wählbaren Grundkreis (Kreis, in dem in der Abbildung die Lamellen angeordnet sind), zunächst die Bewegungskurve des Halbkreismittelpunktes einer Lamelle und dann wegen des tangentialen Anliegens eine Äquidistante zu dieser Kurve mit dem Halbkreisradius als Abstand. Die Koordinatenfunktionen der ersten Kurve sind leicht aus der Hubfunktion mit Sinus und Cosinus zu bilden. Für die Äquidistante muss man (mit den Ableitungen) Normalenvektoren bilden und diese auf die gewünschte Abstandslänge bringen. Es tauchen also wieder einige mathematische Konzepte auf, deren Einsatz zu planen und im CAS umzusetzen ist. Das Ergebnis ist unten abgebildet.

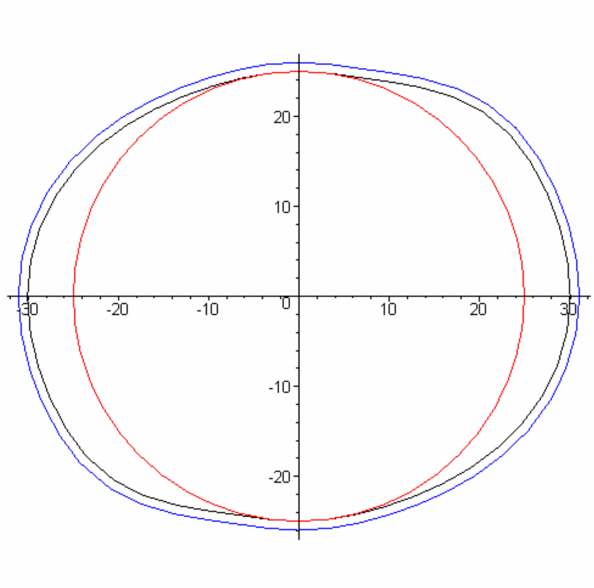

Bild 11: Kurvenring

Zur Fertigung eines entsprechenden Teils sind dann Punkte zu ermitteln und auszulesen, so dass man diese in ein CAD-System einlesen kann.

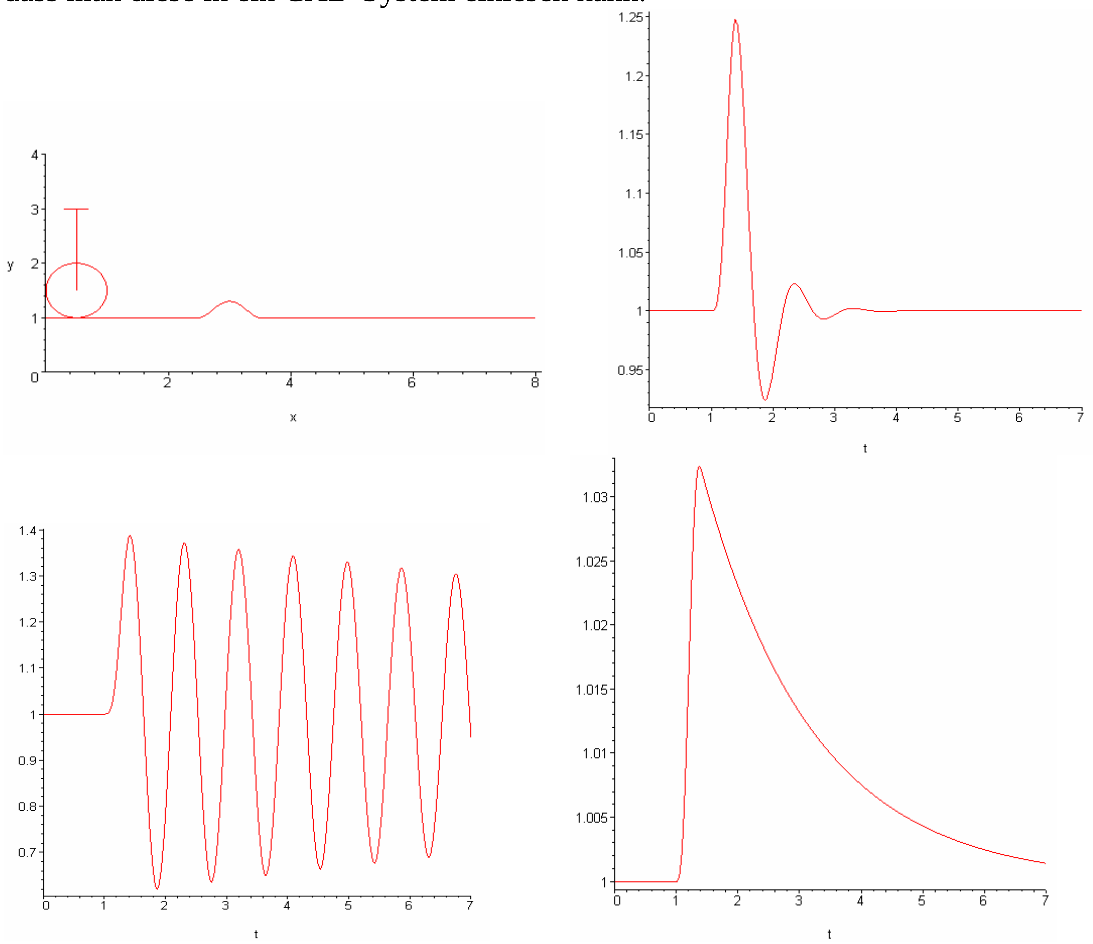

Bild 12: Bremsrampe mit Rad und Ausschläge bei verschiedenen Dämpfern

Beim Projekt „Bremsrampe“ war zunächst die Rampe (siehe Bild 12) als Funktion zu modellieren. Dazu wurde wiederum mit einem Polynom 5. Grades angesetzt und als Bedingungen die Interpolation von Anfangs-, End- und Hochpunkt der Rampe und die waagerechte Tangentenlage an diesen Punkten verwendet. Dies dient als Anregungsfunktion, wozu man natürlich wissen muss, wann das Rad wo ist. Dazu wird eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit angenommen und dann aus der Rampenfunktion eine zeitabhängige Anregungsfunktion erstellt, was im CAS durch Ersetzung der Wegvariablen durch einen entsprechenden Ausdruck in der Zeitvariablen erfolgen kann. Mit dieser Anregungsfunktion wird dann die Schwingungsdifferentialgleichung für den Einmassen-schwinger gebildet und mit dem dsolve-Kommando von Maple gelöst. Hierbei kann man angeben, welche Vorgehensweise bei der Lösung Verwendung finden soll, unter anderem die numerische Lösung und die Lösung über Laplace-Transformation. Das numerische Verfahren hat keine richtige Lösung geliefert; die Laplace-Transformation konnte hingegen mit der stückweise definierten Anregungsfunktion „umgehen“ und hat eine symbolische Lösung geliefert. Hier ist also wichtig, dass die Studenten erkennen, dass den numerischen Lösungen nicht blind zu vertrauen ist und das ein reichhaltigeres Repertoire an Lösungsmethoden auch bei einem Tool wie dem CAS hilfreich sein kann, indem man auf Alternativwegen doch noch zu Lösungen kommt. Ist das Problem einmal gelöst, so kann mit unterschiedlichen Dämpfungskonstanten experimentiert werden. Natürlich ist auch zu klären, welches Verhalten denn überhaupt als wünschenswert anzusehen und damit anzustreben ist. Die in Bild 12 abgebildeten Versuche zeigen mittlere, schwache und starke Dämpfung (man beachte, dass beim ersten Plot der Weg, bei den anderen Plots die Zeit die unabhängige Variable ist).

4. Probleme und Erfahrungen

Die Nutzung des CAS zur Modelleingabe und Bearbeitung läuft in aller Regel nicht reibungslos ab, sondern es ergeben sich Probleme, die mit dem Tutor, meist aber mit dem Verfasser besprochen werden. Diese Probleme sind häufig nicht als ärgerliche „Verzögerer“ im Bearbeitungsfortschritt zu sehen, sondern eher als Lerngelegenheiten, was die mathematischen Konzepte und die Arbeitsweise des CAS anlangt. Wir geben im Folgenden einige Arten von häufig auftretenden Problemen an, erläutern diese an den oben genannten Beispielen und diskutieren die Lernerfahrungen der Studenten.

Spezifika/Eigenheiten des CAS Maple®

Wie jedes mächtigere Tool ist auch ein CAS wie Maple® nicht ganz einfach intuitiv zu bedienen, sondern es gibt eine spezielle Eingabesyntax und Regeln. Da die Studenten Maple zwar kennen gelernt haben, aber – bis auf Ausnahmen – keinen intensiveren Umgang damit hatten, müssen sie sich diese im Rahmen der Projektarbeiten erst wieder ins Gedächtnis rufen. Häufige Probleme macht die Unterscheidung zwischen Funktion und Funktionsausdruck. Hat man in Maple einem Symbol eine Zuordnungsvorschrift zugewiesen, etwa in der Form:

```
> f:=x->x^2;
```

so kann man den Funktionsausdruck in der Form f(x) nutzen (etwa beim Differenzierungs-Kommando diff(f(x),x)) und man kann Werte in der üblichen Papierform bilden, etwa f(2). Hat man einem Symbol aber nur einen Funktionsausdruck zugewiesen, etwa

```
f:=x^2;
```

so macht der Ausdruck f(x) keinen Sinn. Will man dort Werte berechnen, so geht dies mit der Einsetzung („substitute“), etwa subs(x=2, f);

Solche Unterscheidungen sind die Studenten von der Arbeit mit Stift und Papier nicht gewohnt und stellen eine neue Schwierigkeit beim Einsatz des CAS dar. Als weiteres Beispiel sind die Auswertereihenfolgen zu nennen. Hat man z.B. die Funktion f wie oben angegeben gebildet, beschreibt dann die Ableitungsfunktion in folgender Weise:

```
> Abl_f:=x->diff(f(x),x);
```

und bildet dann Abl_f(2), so erhält man einen Fehler, da Maple zunächst im Ausdruck diff(f(x),x) für x die Zahl 2 einsetzt, dann den Befehl diff ausführen will und natürlich nicht nach 2 ableiten kann. Ähnliche Schwierigkeiten ergeben sich auch beim Aufsummieren mit „sum“ (nicht dagegen bei „add“). Man kann diese Schwierigkeiten zwar immer umgehen, aber allein dieses Umgehen macht eine spezifische Anpassung des Bearbeiters an das Tool erforderlich und damit den Umgang komplizierter. Es ist dann doch nicht so, dass der Student sich auf die Planung der Vorgehensweise beschränken könnte und die Durchführung einfach an das Tool delegiert werden kann. Sicherlich könnten bei einer intensiven Nutzung des CAS in den ersten beiden Semestern viele der auftretenden Probleme bereits vorher geklärt werden.

Scheitern von Maple-Kommandos

In den Beispielen „Scheibenwischer" und „Bremsrampe" kommt es vor, dass Maple-Kommandos kein Ergebnis liefern, obwohl ein Ergebnis existieren muss. Dort handelt es sich um das Lösen von nicht-linearen Gleichungssystemen bzw. von Differentialgleichungen. Man sieht, dass ein einfaches „Delegieren" von mathematischer Lösungsarbeit an das CAS nicht ausreicht, sondern dass man zum einen eine Vorstellung davon haben sollte, was denn eine Lösungsroutine „im Prinzip" zu leisten vermag, und zum anderen über ein Repertoire an Nutzungsmöglichkeiten verfügen sollte, um doch noch zu einer Lösung zu kommen (dies zeigt sich an einigen Stellen auch bei Henn (1997) und Townend/Pountney (1995)). Bei den Gleichungssystemen kann man zunächst eine symbolische Lösung mit „solve" versuchen, außer man erkennt sofort, dass eine symbolische Lösung nicht möglich ist. Solch ein „algebraischer Blick" ist bei den Ingenieurstudenten aber nicht weit verbreitet, da der algebraische Umgang auch nicht so trainiert wird. Beim numerischen Lösen mit fsolve sollte man wissen, dass man eher zu einer Lösung kommt, wenn man den Suchbereich entsprechend einschränken kann. Wenn trotz eingeschränkten Suchbereichs keine Lösung geliefert wird, entstehen Zweifel an der korrekten Aufstellung des Gleichungssystems. Diese können pragmatisch beseitigt werden, indem man eine (aus Abmessungen oder einem anderen Programm) korrekte oder nahezu korrekte Lösung mit „subs" einsetzt (substituiert) und prüft, ob die Gleichungen (annähernd) korrekt sind. Ist letzteres der Fall und führen Variationsversuche bei den Suchbereichen nicht zum Ziel, so ist erneut eigene mathematische Intelligenz bei einer Untersuchung des Gleichungssystems nach Vereinfachungsmöglichkeiten erforderlich. Im Beispiel „Scheibenwischer" geht dies mit einer Reduktion der Unbekanntenzahl durch Einführung neuer Variabler und durch die Entkopplung.

Bei den Differentialgleichungen stehen zahlreiche Verfahren zur Verfügung, die mit dem Befehl „dsolve" genutzt werden können. Hier kann man das CAS entscheiden lassen oder alle Möglichkeiten durchprobieren. Mit dem Einsatz von mathematischen Kenntnissen (einfache Transformation von stückweise definierten Funktionen mit der Laplace-Transformation) kann man aber die Nutzung effizienter gestalten. Townend/Pountney (1995) beschreiben eine ähnliche Situation bei der Nutzung von Differentialgleichungslösern in DERIVE® zur Modellberechnung.

Der Student steht hier vor dem Problem, dass er Prozeduren nutzt, deren innere Abläufe er nicht oder nicht genau kennt, weswegen er auch nicht weiß, warum eine Prozedur nicht funktioniert oder funktionieren kann. Das geht aber dem erfahrenen Nutzer eines Tool meistens genauso (vgl. Alpers 2006, zur Nutzung von CAD-Systemen). Es zeigt sich jedenfalls wiederum, dass sich der Nutzer nicht einfach auf die Planung des Vorgehens beschränken kann, sondern ein gewisses Hintergrundwissen über Arbeitweise und Varianten erforderlich ist, wenn man Probleme flexibel umgehen will. Auch Heid et al. (1998) betonen, dass nur mit einer Kombination aus konzeptionell-mathematischem und CAS-Wissen eine erfolgreiche Nutzung möglich ist.

Nutzen und Grenzen der Symbolik

Heutige CAS unterstützen symbolische, numerische und graphische Methoden, wobei der Schwerpunkt auf der Symbolik liegt (auch als Abgrenzungsmerkmal gegenüber rein numerischen Programmen und Bibliotheken). An den Beispielen zeigen sich sowohl Nutzen als auch Grenzen der Symbolik. Lässt sich eine Rechnung wie die Krümmungsbestimmung beim Projekt „Bewegung um Hindernisse" oder die Maximalgeschwindigkeit beim Projekt

Bahngeschwindigkeit rein symbolisch durchführen, so ist der Aufwand sehr gering und man kann im Wesentlichen wie auf dem Papier arbeiten. Scheitert die Symbolik wie beim „Scheibenwischer" oder bei der Umrechnung von v(s) auf v(t) beim Projekt „Bahngeschwindigkeit", so sind die Berechnungen mehrfach (günstigerweise mit Schleife) durchzuführen und der Umgang mit der Werteliste ist auch aufwändiger als bei einer symbolischen Lösung. Zum Beispiel muss man beim Plot erst wieder eine Punkteliste erstellen und ggf. noch eine Splinefunktion durch die Punkte legen.
Neben der Nicht-Lösung taucht als weiteres Problem bei symbolischen Lösungen die Mehrdeutigkeit auf. Dies verbirgt sich in Maple häufig in „RootOf"-Ausdrücken, die in Lösungen enthalten sind und symbolisch für alle Nullstellen des eingeschlossenen Ausdrucks stehen. Schon wenn man beim Beispiel „Scheibenwischergetriebe" zwei Kreise schneidet, um die Lage des Drehgelenks eines Zweischlags zu ermitteln, ergeben sich in der Regel zwei Lösungen, die Maple mittels „RootOf"-Ausdruck zurückgibt. Man kann dann versuchen, daraus alle möglichen Lösungen über „allvalues" zu erhalten, was aber auch nicht immer funktioniert, insbesondere wenn der Lösungsausdruck mehrere solche Ausdrücke enthält. Es tauchen auch Probleme auf, wenn das CAS symbolische Ergebnisse liefert, die nur für einen gewissen Definitionsbereich Gültigkeit haben, was meist bei der Verwendung von Arcus-Funktionen auftritt. Hier zeigen sich wieder die Grenzen der Symbolik in einem CAS.

Outputinterpretation und –nutzung
Auch bei der Outputinterpretation besitzt die Symbolik eines CAS wieder Chancen und Grenzen. Bei kleineren, überschaubaren Ausdrücken kann der symbolische Output zur Kontrolle und zur Festigung des Verständnisses durch Wiedererkennung von Ausdrücken des handschriftlichen Rechnens dienen. So sieht man beim Output der Splineprozedur oder bei der eigenen Aufstellung einer stückweise definierten Funktion genau die Teilausdrücke (Polynome bei Splines) mit ihren Geltungsbereichen. Symbolischer Output kann aber auch verwirrend sein und das Worksheet unleserlich machen, wenn man etwa zu Splinekurven Äquidistante bestimmt und mit Ableitungen und Normierungen von Normalenvektoren riesige Ausdrücke erzeugt.
Eine fehlerhafte Verwendung von Maplekommandos und –ausdrücken kann bei Betrachtung des Outputs auch teilweise erkannt werden: Wenn etwa einem Symbol f ein Ausdruck x^2 und keine Zuordnungsvorschrift x->x^2 zugewiesen wurde (siehe oben) und dann f(x) ausgegeben wird, so erhält man in Maple x(x)^2 und dieses zusätzlich eingefügte „von x" sollte den Bearbeiter aufmerksam machen. An solchen Beispielen zeigt sich aber auch, dass insbesondere von schwächeren Studenten der Output ignoriert und damit eine Verständnis- und Fehlererkennungschance verpasst wird (ähnlich: Heid et al. 1998). Generell stellt sich das Problem des Umgangs mit mathematischen Objekten, die – wie etwa bei der Nutzung der Spline-Prozedur – nicht eigenhändig erstellt worden sind und zudem in der Syntax und Vereinfachungsweise des Tools angeboten werden (vgl. Weigand/Weth 2002).
Neben dem symbolischen Output liefert das CAS auch numerischen und graphischen Output. Beim numerischen Output kann eine grobe Kontrolle der Sinnhaftigkeit erfolgen, indem der Wert bei einer gegebenen Beispielkonfiguration nachgeprüft wird. Der graphische Output besteht aus Funktionsgraphen oder geometrischen Objekten. Er dient häufig als Feedback bezüglich der Korrektheit und Güte des vorher berechneten Objekts. Eigenschaften des graphischen Outputs müssen auf den vorhergehenden symbolischen und numerischen Input bezogen werden, um sinnvoll Fehler zu beseitigen oder zu optimieren. Hier wird ein flexibler Wechsel zwischen Darstellungsformen geübt (ähnlich: Heid et al. 1998).

Von Rechenschritten zur Experimentierumgebung
Bei allen genannten Projekten geht die Nutzung des CAS über eine bloße Delegation einzelner Rechenschritte an die Maschine hinaus. Wird das CAS auch häufig anfänglich in

dieser Weise genutzt, um überhaupt zu ersten Ergebnissen zu kommen, so erfordert die Aufgabenstellung doch meist eine Gestaltung des Worksheets, die ein einfaches Experimentieren gestattet. Dafür sind am Anfang die Symbole, die die Inputdaten speichern sollen, festzulegen und die folgenden Rechenschritte sind dann nicht mit konkreten Daten, sondern mit den Symbolen durchzuführen. Damit gewinnt der Gang der Berechnung größere Klarheit und Übersichtlichkeit. Inputdaten und „Zwischendaten“ bei der Berechnung (z.B. Splines) können bei einem CAS auch symbolische Ausdrücke wie Funktionsausdrücke sein, wodurch sich ein CAS wesentlich von einem Tabellenkalkulationsprogramm unterscheidet.
Mit der eigenen Erstellung einer Experimentierumgebung verwandeln die Studenten das Mathematik-Tool CAS in ein Instrument zur Bearbeitung einer konkreten Problemstellung, d.h. sie sehen nicht nur die generellen Möglichkeiten, sondern verbinden damit auch ein spezielles Nutzungsszenario (vgl. (Lagrange 2002) zur französischen Diskussion des Begriffspaares Tool und Instrument). Das Experimentieren in der selbst geschaffenen Umgebung unterscheidet sich auch deutlich von der Arbeit mit Papier und Stift, da die Möglichkeit des schnellen Ausprobierens und Feedbacks entsteht. Natürlich benötigt das sinnvolle und effiziente Experimentieren mathematische Überlegungen. So muss man beim Projekt „Bewegung um Hindernisse“ die Punkte so setzen, dass die Krümmungsrestriktion noch eingehalten wird, aber die Länge möglichst reduziert wird. Dazu benötigt man eine Vorstellung von Krümmung und Länge und von der Beeinflussung dieser Größen durch das Setzen von Interpolationspunkten. Ferner ist die Vorgehensweise in der Experimentierumgebung eher durch ingenieurmäßiges als durch mathematikermäßiges Denken bestimmt: Man experimentiert möglichst zielgerichtet, betrachtet die Auswirkungen in einem Plot, erkennt dort die Einhaltung der Restriktion oder die Güte des Zielkriteriums und hört auf, wenn das Ergebnis akzeptabel ist. Demgegenüber würde ein Mathematiker eher eine Optimierungsmodellierung mit entsprechender Rechnung durchführen.

CAS als Verstärker („Amplifier“) und Reorganisierer („Reorganizer“)

Die unterschiedlichen Rollen eines Verstärkers bzw. Reorganisierers beim Einsatz eines CAS wurden schon häufiger in der Literatur beschrieben (vgl. Heid 2002). Bei den Projekten tritt das CAS auch in beiden Rollen auf. Das CAS übernimmt Aufgaben, die die Studenten zwar im Prinzip auch in Handrechnung durchführen könnten, die aber – gerade auch wenn man auf das Experimentieren abzielt – für die Handrechnung zu aufwändig wären (Verstärker). Ferner übernimmt das CAS auch Berechnungen, die die Studenten selbst nicht durchführen könnten, weil sie das zugrunde liegende Verfahren (noch) nicht beherrschen (beide Nutzungsweisen auch bei Townend/Pountney 1995). Dies gilt beispielsweise beim numerischen Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen, wobei das Newton-Verfahren nur im eindimensionalen Fall bekannt ist. Es bleibt in diesem Fall natürlich das oben bereits beschrieben Problem der Prüfung des Outputs oder der geschickten Verwendung einer solchen Prozedur, wenn die einfache Durchführung versagt. Dies ist aber ein generelles Problem für Ingenieure, die mit Tools arbeiten müssen, deren interne Arbeitsweise sie nicht kennen. Ein flexibler Umgang mit dem Tool auf Basis mathematischer Kenntnisse über Alternativmöglichkeiten ist hierbei wichtig.

Nutzungstiefe und Differenzierung

Je nach Fähigkeit und Engagement der Studenten wird das CAS mehr oder weniger elegant, vielfältig und effizient genutzt. Die meisten Studenten beschränken sich auf das Nutzen elementarer Möglichkeiten, wobei im Zweifel eher kopiert und dann modifiziert wird, als dass eine Überlegung stattfindet, wie man durch Umstrukturierung und Schleifen eine mehrfache Durchführung mit unterschiedlichen Eingangsdaten realisieren könnte. Bei den Besprechungen mit den Projektgruppen werden zwar Hinweise auf solche Möglichkeiten gegeben, die aber nur von einem Teil aufgegriffen werden.

In erster Linie geht es in den Projekten darum, dass überhaupt eine mathematische Problemlösung erfolgt, ohne dass eine bestimmte Nutzungsweise und –tiefe des CAS erzwungen wird. Der Verfasser sieht vielmehr im Einsatz des CAS auch gute Differenzierungsmöglichkeiten: Diejenigen Studenten, die mathematisch besonders begabt sind und sich entsprechend leichter mit der Aufgabenstellung tun, investieren mehr Zeit und Aufwand in das Ergründen weiterer CAS-Möglichkeiten bis hin zur Programmierung von Lösungsprozeduren, während andere Studenten sich zunächst einmal darauf konzentrieren, die Aufgabenstellung überhaupt in den Griff zu bekommen. Die begabteren Studenten haben dann sicherlich mehr gelernt, aber auch die schwächeren konnten – mit entsprechender Hilfestellung (vgl. Abschnitt 5) – eine Problemlösung erreichen (vgl. dazu auch (Zbiek 2002)).

Steuerung des Lernprozesses – Lernen der Vorgehensweise

Der Verfasser versucht in den Diskussionen mit den Projektgruppen auch methodische Hinweise zu geben und so auf den Bearbeitungs- und Lernprozess einen gewissen Einfluss zu nehmen. Zum einen geht es dabei natürlich um das prinzipielle Vorgehen bei der Projektbearbeitung; zum anderen – und nur darauf soll im Folgenden eingegangen werden – steht die Umsetzung mit dem CAS zur Debatte.

Die Projektgruppen wenden sich an den Verfasser, wenn Maple Fehlermeldungen oder Resultate ausgibt, die sie sich nicht erklären können. Häufig tritt dies beispielsweise auf, wenn nach einer Reihe von Kommandos ein Plot erzeugt werden soll und Maple dies nicht kann, etwa nur die Meldung „empty plot“ liefert. Hier zeigt eine nähere Betrachtung des Rechengangs in Maple dann meistens, dass schon bei den Zwischenresultaten falscher oder gar kein Output geliefert wurde, dieser aber von der Projektgruppe ignoriert worden ist. Hier weist der Verfasser dann auf das sinnvolle methodische Vorgehen des schrittweisen Überprüfens hin, um die Quelle des Fehlers zu erkunden. Auch wird nachgefragt, was denn bei einem Schritt an Resultat überhaupt zu erwarten sei. Es wird also deutlich gemacht, dass man nicht einfach unreflektiert die Kommandos nacheinander durchführen und dann hoffen kann, dass am Ende etwas Sinnvolles herauskommt. Bei der Überprüfung von Zwischenresultaten oder Objekten ergeben sich dann verschiedene Techniken, z.B. bei Funktionen der Plot oder bei Gleichungssystemen das Einsetzen von bekannten Lösungen, wie dies oben schon beschrieben worden ist. Ziel der entsprechenden Diskussionen mit den Projektgruppen ist es, den Reflektionsgrad bei der Nutzung des CAS zu erhöhen, denn am jeweils vorliegenden Problem zeigt sich ja gerade, dass dies für eine sinnvolle Nutzung unbedingt erforderlich ist und das Tool den Nutzer keineswegs vom mathematischen Denken befreit.

Die Einzel-Diskussionen mit den Projektgruppen erlauben es auch, je nach mathematischen Fähigkeiten den Lösungsprozess mehr oder weniger zu steuern. Wenn der Verfasser sieht, dass eine Projektgruppe zwar engagiert ist, sich aber mit der Maple-Umsetzung sehr schwer tut, kann er mehr oder weniger detaillierte Hinweise dazu geben. Bei Diskussionen mit fortgeschrittenen Projektgruppen ergeben sich häufig aus der experimentellen Arbeit weitere Fragen und Anregungen, die je nach Zeit und Engagement auch noch aufgegriffen werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Veranstaltung „Mathematik III“ nur zwei Stunden des 26-stündigen Curriculums einnimmt. Manchmal ist dann ein „Bremsen“ sinnvoller.

5. Einstellungen

Den folgenden Bemerkungen und Beobachtungen sei vorweg geschickt, dass der Verfasser keine wissenschaftliche Studie der Einstellungen und Einstellungswandlungen bei den Studenten bezüglich des Tools CAS gemacht hat. Es handelt sich also im Folgenden um Einschätzungen, die auf zahlreichen Gesprächen des Verfassers mit Studenten während der Projektarbeit und auch in späteren Semestern beruhen.

Die Studenten haben das CAS Maple ® bereits in den ersten beiden Semestern als einerseits sehr mächtiges, aber andererseits auch nicht ganz leicht zu bedienendes Tool kennen gelernt.

Dementsprechend sind die Erwartungen bezüglich der CAS-Nutzung bei vielen Studenten eher skeptisch, auch wenn die generelle Haltung gegenüber den Anwendungsprojekten positiv ist.
Viele Studenten fühlen sich in ihrer Skepsis bestätigt, wenn sie aufgrund von Problemen mit der Maple-Syntax längere Zeit am Worksheet arbeiten, ohne einen Erfolg zu erzielen und in der Problembearbeitung voranzukommen. Um hier keine ausgeprägte Aversion zu hinterlassen, ist eine angemessene und zeitnahe Betreuung durch den studentischen Tutor und den Verfasser unbedingt erforderlich. Die Projektgruppen können „fast“ jederzeit den Verfasser konsultieren, was natürlich mit einem entsprechend hohen Zeitaufwand verbunden ist. Dieser zahlt sich aber auch bezüglich der Einstellung der Studenten aus. Wie schon (Zbiek 2002) bemerkt, ist neben dem Tool immer noch der menschliche Faktor für die Studenten bzw. Schüler ausschlaggebend.
Begabtere Studenten entwickeln häufig eine sehr positive Einstellung zur CAS-Nutzung, weil sie die vielfältigen Möglichkeiten von CAS als Werkzeuge zum Problemlösen sehen und auch relativ zügig mit diesen umgehen können. Entsprechend ziehen sie auch einen größeren Gewinn aus der CAS-Nutzung.
Alle Studenten sehen, dass ein CAS nicht das Allheilmittel gegen mathematische Schwächen ist, sondern dass ein CAS nur dann bei der Problemlösung hilft, wenn man es auf der Basis mathematischen Verständnisses sinnvoll nutzen kann. In realistischer Einschätzung der eigenen Fähigkeiten kann dies natürlich auch dazu führen, dass schwächere Studenten in den nachfolgenden Semestern eine weitere CAS-Nutzung für sich als nicht sinnvoll ansehen. Häufig gibt es auch Anwendungsprogramme, in denen die mathematischen Modelle und Berechnungen bereits verborgen sind (vgl. Alpers 2006). Es zeigt sich auch, dass nur ein kleinerer Teil des Semesters das CAS bei Berechnungen im Hauptstudium nutzt und sich dann auch bei Schwierigkeiten an den Verfasser wendet.
Ausgesprochen positiv gesehen wird häufig die graphische Darstellung (vgl. dazu auch Heid 2002), wobei ein CAS natürlich erst durch die Verbindung von Symbolik, Numerik und Graphik seine volle Kapazität entfalten kann.

6. Zusammenfassung

Im Rahmen der Mathematikausbildung für Maschinenbauingenieure wird das CAS Maple® für die Durchführung von Berechnungen bei mathematischen Anwendungsprojekten eingesetzt. Ziel des vorliegenden Beitrags ist es, die Arten der Nutzung und sich ergebende Probleme sowie die Einstellung der Studenten anhand von einigen Beispielen zu erläutern und schließlich systematischer zu erfassen und mit in der Literatur beschriebenen Nutzungsweisen abzugleichen.
Zwar erlaubt der Einsatz eines CAS die Konzentration auf die Planung der Vorgehensweise (Zbiek 2002, Heid 2002, Weigand/Weth 2002), aber das mathematische Verständnis für eine Berechnung ist immer noch wesentlich für die sinnvolle Nutzung entsprechender Kommandos, insbesondere wenn wie bei den Projekten auch komplexere mathematische Objekte betrachtet werden. Die Vorstellung eines einfachen „Delegierens“ der Berechnungsarbeit greift hier sicherlich zu kurz. Das Umgehen von Problemen erfordert einen flexiblen Umgang mit dem CAS, basierend auf einem guten Verständnis sowohl der mathematischen als auch der CAS-Möglichkeiten. Erst dann kann man das Tool CAS verwenden, um sich eine gute Experimentierumgebung zu schaffen und damit das Tool in ein persönliches Instrument zur Lösung gewisser Probleme verwandeln.
Da die Nutzung nicht einfach und unproblematisch ist, sind die Einstellungen der Studenten auch durchaus gemischt. Es zeigt sich wieder, dass insbesondere die begabteren Studenten profitieren und dem CAS entsprechend positiv gegenüberstehen. Aber auch die schwächeren Studenten können bei geeigneter Betreuung zumindest das gestellte Anwendungsproblem bewältigen, haben aber berechtigte Bedenken, später das CAS eigenständig in ihren

Anwendungsfächern verwenden zu können. Abhilfe könnte hier ein durchgängiger Einsatz des CAS auch in den ersten beiden Semestern leisten.

Literatur

Alpers, B. (2002). Mathematical Application Projects for Mechanical Engineers - Concept, Guidelines and Examples. Technology in Mathematics Teaching, Proc. of ICTMT 5 in Klagenfurt 2001, M. Borovcnik, H. Kautschitsch (eds.), öbv&hpt, Wien 2002, pp. 393-396.

Alpers, B. (2003). MAPS: A Mathematical Application Project Server, in: Hibberd, S., Mustoe, L. (Eds.): The Mathematical Education of Engineers IV, Proc. IMA Conference, Loughborough 2003.

Alpers, B. (2006). Mathematical Qualifications for using a CAD program, in: Hibberd, S., Mustoe, L. (Eds.): The Mathematical Education of Engineers V, Proc. IMA Conference, Loughborough 2006 (to appear).

Christen, C., Ruthardt, M. (2000). Zur Struktursynthese von Scheibenwischergetrieben. Kurvengetriebe, Koppelgetriebe, gesteuerte Antriebe: Problemlösungen in der Bewegungstechnik (VDI-Getriebetagung 2000), VDI-Bericht 1567, Düsseldorf: VDI-Verlag, pp. 149-166.

Decker, K.-H. (2001). Maschinenelemente. Funktion, Gestaltung und Berechnung, bearbeitet von K. Kabus, 15. neu bearbeitete und erw. Aufl, München, Wien: Hanser.

Edwards, D., Hamson, M. (2001). Guide to Mathematical Modelling, 2nd Edition, Houndmills, Basingstoke: Palgrave.

Heid, M.K., Blume, G.W., Flanagan, K., Iseri, L., Kerr, K. (1998). The Impact of CAS on Non-routine Problem Solving by College Mathematics Students, Int. Journal of Computer Algebra in Mathematics Education 5, pp. 217-249.

Heid, M.K. (2002). Theories for Thinking about the Use of CAS in Teaching and Learning Mathematics, in: Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Edcucation, J.T. Fey. A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, R.M. Zbiek (Eds.), Reston, VA: NCTM, pp. 33-52.

Henn, H.-W. (1997). Realitätsnaher Unterricht mit DERIVE, Bonn: Dümmler.

Lagrange, J.-B. (2002). Learning Techniques and Concepts Using CAS: A Practical and Theoretical Reflection, Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Edcucation, J.T. Fey. A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, R.M. Zbiek (Eds.), Reston, VA: NCTM, pp. 269-284.

Townend, M.S., Pountney, D.C. (1995). Learning Modelling with Derive. London et al.: Prentice Hall.

Weigand, H.-G., Weth, Th. (2002). Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Westermann, Th. (2003). Mathematische Probleme lösen mit Maple®, Berlin/Heidelberg: Springer.

Zbiek, R.M. (2002). Using Research to Influence Teaching and Learning with Computer Algebra Systems, in: Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Edcucation, J.T. Fey. A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, R.M. Zbiek (Eds.), Reston, VA: NCTM, pp. 197-216.