Die mathematische Mikrowelt "Formel 1" - Lernangebot und Nutzung in der Schüler-Ingenieur-Akademie (SIA)

Burkhard Alpers, Fachhochschule Aalen

1. Einleitung

Mathematische Mikrowelten sind Lernumgebungen, in denen Objekte und Operationen angeboten werden, die bestimmte mathematische Konzepte repräsentieren. Konstruktives (synthetisches) Arbeiten in der Mikrowelt dient dazu, die Eigenschaften der Objekte und Operationen besser zu verstehen. Experimente und exploratives Arbeiten basierend auf dem Feedback der Mikrowelt sollen gefördert werden (vgl. (Edwards, 1998)).

Der Begriff Mikrowelt wurde von S. Papert im Zusammenhang mit der LOGO-Umgebung Anfang der achtziger Jahre eingeführt. Computer-Algebra-Systeme stellen nun bereits eine Vielzahl von mathematischen Objekten und Operationen zur Verfügung und sind daher gute Umgebungen für die Implementierung einer Mikrowelt (vgl. (Alpers, 2002a)). Allerdings bieten sie meist nur "Low-level-Objekte" an und erfordern eine Syntax, die eine gewisse Einarbeitung notwendig macht. Zudem ist das Feedback nicht unmittelbar geeignet, die Lernenden weiterzuführen.

Um den Lernenden eine geeignetere Umgebung anzubieten, hat der Verfasser auf Basis des CAS Maple die mathematische Anwendungsmikrowelt "Formel 1" erstellt. Diese besteht aus "höherwertigen" Objekten und Operationen (Prozeduren), mit denen Rennkurse bestehend aus Geraden- und Kreisstücken konstruiert und Fahrfunktionen für die Kurse erstellt und auf ihre Tauglichkeit hin untersucht werden können. Die mathematischen Objekte haben in dieser Mikrowelt also Anwendungsbedeutung, und es ist auch das Anwendungsszenario (Formel 1 oder Carrera-Bahn), das die wesentlichen Fragestellungen und Untersuchungskriterien liefert. Die mathematischen Themen, die in dieser Mikrowelt behandelt werden, beinhalten zum einen die Geometrie der Kreis- und Geradenstücke, zum anderen Funktionen und deren Eigenschaften (stückweise definierte Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Wachstumsverhalten).

Im folgenden sollen die Objekte und Operationen der Mikrowelt und mögliche und tatsächliche Lernszenarien vorgestellt werden (für eine ausführliche Beschreibung vgl. (Alpers, 2004)). Letztere basieren auf dem konkreten Einsatz der Mikrowelt in der sogenannten Schüler-Ingenieur-Akademie (SIA) in Heidenheim (Baden-Württemberg) in den Jahren 2001 bis 2004. In der SIA lernen Schüler der 11. und 12. Klasse, die sich für die Teilnahme beworben haben und ausgewählt wurden, an einem Tag in der Woche (vom Kultusministerium anerkannt) die Arbeitswelt des Ingenieurs kennen. Die Mikrowelt soll die Schüler in das sogenannte "Bewegungsdesign" einführen, wie es auch von Ingenieuren bei der Festlegung der Bewegung von Maschinenteilen durchgeführt wird. Dazu wurden - nach zwei einführenden Sitzungen zum CAS Maple - an vier Nachmittagen für eine Carrera-Bahn Kurs- und Fahrdaten ermittelt und Kurse und Fahrfunktionen konstruiert und untersucht.

2. Modellierung von Kursen

Rennkurse bestehen in der Mikrowelt aus Geraden- und Kreisstücken ohne Breite. Dies ist natürlich für Formel 1 - Kurse eine starke Vereinfachung (es gibt z.B. keine "Ideallinie" mehr), für Carrera-Kurse aber ein adäquates Modell, wobei allerdings das "Ausscheren" nicht modelliert werden kann.

Die Definition eines Kursstücks erfolgt in der Mikrowelt schlicht durch Bilden einer Dreierliste mit Einträgen für die Länge, den Winkel und die Orientierung. Um zum Beispiel ein 60°-Stück so "anzulegen", dass es (vom bereits existierenden Kursteil aus gesehen) eine (mathematisch positive) Linkskurve beschreibt, definiert man:

```
> links_kurve_60:=[Pi/3*r, r, `+`];
```

wobei r den Radius beschreibt, der noch festzulegen ist. Bei Geradenstücken wird der Radius als "infinity" angegeben, die Orientierung spielt keine Rolle. Man schreibt zum Beispiel:

```
> lange_gerade:=[200,infinity,`+`];
```

Um nun einen ganzen Kurs festzulegen, bildet man einfach eine Liste von solchen Kursstücken:

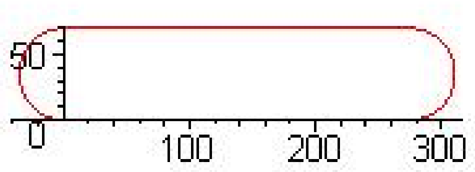
```
> kursdaten:=[lange_gerade, links_kurve_60, links_kurve_60, links_kurve_60,
              lange_gerade, links_kurve_60, links_kurve_60, links_kurve_60];
```

Bei der Definition von Kursstücken und daraus zusammengesetzten Kursen werden nur in Maple bereits vorhandene Datenstrukturen genutzt und mit einer Anwendungsbedeutung versehen. Will man sich den Kurs nun aber anschauen, etwa um zu sehen, ob man überhaupt das gewünschte modelliert hat, muss man aus den Kursdaten eine stückweise definierte Kurve in Parameterdarstellung erzeugen. Dazu müssen zum einen die entsprechenden mathematische Vorkenntnisse vorhanden sein, zum anderen ist die Konstruktion bei längeren Kursen außerordentlich mühsam. Sie birgt aber auch interessantes mathematisches Lernpotential, da die Erstellung eines Kurses mit einem einzigen Laufparameter, der gleichzeitig die Bogenlänge darstellt, eine schöne Anwendung der Parameterdarstellung ist (zur Durchführung in mathematischen Anwendungsprojekten für Maschinenbauingenieure vgl. (Alpers, 2002b)). Um mit Kursen experimentieren zu können, ohne die aufwändige stückweise Konstruktion selbst durchzuführen, wird in der Mikrowelt eine entsprechende Operation (=Maple-Prozedur) angeboten:

```
> kurs:=konstruiere_kurs(kursdaten);
```

Das resultierende Objekt kann dann geplottet werden:

```
> plot(kurs);
```



Im beschriebenen Rahmen sind jetzt bereits interessante Lernaktivitäten zu initiieren. Man kann zum einen bestehende Formel 1 - Kurse oder Carrera-Rennkurse nachmodellieren oder auch freie Kurskonstruktion bei grober Vorgabe des Verlaufs durchführen. Im ersten Fall sind zunächst einmal die entsprechenden Daten zu besorgen, sei es durch Internetrecherche oder durch eigene Vermessung von Carrera-Stücken. Im Rahmen der SIA-Aktivitäten haben die Schüler mit einfachen Mess-Mitteln die Daten der Kreis- und Geradenstücke bestimmt, wie Abbildung 1 zeigt. Ferner haben einige Schüler, die den realen Kurs schnell modelliert hatten, grob skizzierte Kurse wie den in Abbildung 2 dargestellten Kurs modelliert. Dabei können sich interessante geometrische Modellierungsfragen ergeben, wenn die Schüler versuchen, einen geschlossenen Kurs zu bilden. Der Plot liefert bei jedem Versuch das nötige Feedback und gibt Anlass, darüber nachzudenken, mit welchen Mittel (Änderungen in der Kursstückdefinition) man gewisse Eigenschaften erzeugen, d.h. geometrische Eigenschaften in algebraische umsetzen kann. Beim Kurs in Abbildung 2 kann man sich zum Beispiel fragen, wie die Geradenlänge festzulegen ist, wenn der Kreisbogen nicht mehr einen 270°-Winkel, sondern irgendeinen Winkel zwischen 180° und 270° einschließt.

Abbildung 1: Vermessung von Kursstücken

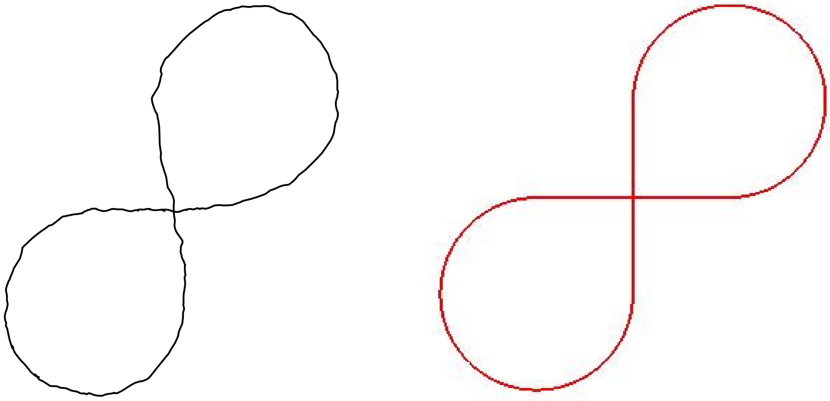


Abbildung 2: Vorgabe und Realisierung

Bei der freien Modellierung stellt sich häufig die Frage der Kursschließung. Hierfür bietet die Mikrowelt eine eigene Operation an, die - je nach Lage - zwei oder drei zusätzliche Kursstücke berechnet, um den Kurs zu schließen. Schließlich steht noch eine Operation zur Berechnung der Gesamtlänge zur Verfügung, die beim Nachmodellieren realer Kurse als Vergleich zu Internetangaben dienen kann.

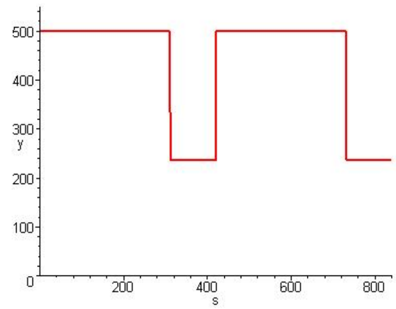
3. Modellierung und Untersuchung von Fahrfunktionen

Der zweite Teil der Mikrowelt betrifft die Konstruktion von Fahrfunktionen für einen gegebenen Kurs. Dies kann nur dann sinnvoll erfolgen, wenn man gewisse Restriktionen einhält. Offensichtlich können gewisse Geschwindigkeiten auf bestimmten Kursstücken (in der Carrera-Bahn oder im realen Formel 1-Kurs) nicht überschritten werden. Beim einfachen Rundkurs (Gerade, Halbkreis, Gerade, Halbkreis) wurden in der SIA die maximalen Geschwindigkeiten in der Kurve und auf der Geraden mit einer Messvorrichtung für die Momentangeschwindigkeit ermittelt, die in einem anderen SIA-Projekt entwickelt wurde. In der Mikrowelt legt man die Maximalwerte für einzelne Kursabschnitte in einer Liste fest (Einheit hier: cm/s):

```
> maximalwertliste:=[500, 236, 236, 236, 500, 236, 236, 236];
```

Die Mikroweltoperation konstruiere_restriktion erzeugt dann einen Plot "vmax über s":

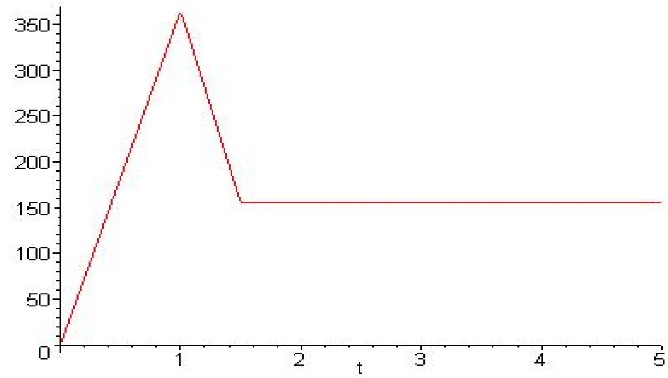
```
> restriktion:=konstruiere_restriktion(kursdaten, maximalwertliste);
> plot(restriktion);
```



Dieser Plot wird später verwendet, um die Restriktionseinhaltung bei einer konstruierten Fahrfunktion zu untersuchen. Der gemeinsame Plot von Fahrfunktion und Restriktion bildet das wichtigste Feedback-Angebot in diesem Teil der Mikrowelt. Eine weitere Restriktion, für die es allerdings in der Mikrowelt keine explizite Modellierung gibt, betrifft die maximale positive und negative Beschleunigung. Auch diese Größen wurden in der SIA mit Hilfe des Messgeräts für die Momentangeschwindigkeit ermittelt, wobei ein einfaches Modell mit konstanter Beschleunigung bei durchgedrücktem bzw. losgelassenem Regler zugrunde gelegt wurden. Damit erhält man natürlich auch nur grobe Näherungen.

Der Lernende kann nun die Bewegung durch eine geeignete Funktion festlegen, wobei er etwa s(t), v(t), a(t) oder v(s) festlegen kann. Die Schüler in der SIA haben sich für v(t) entschieden, weil sie das Bild des Tachos vor Augen hatten und damit die Bewegungsbeschreibung über die Geschwindigkeit nahe lag. Sie haben - auf Anregung des Verfassers - mit einem ganz einfachen Modell begonnen, das nur drei Arten der Beschleunigung vorsieht: Vollgas, Vollbremsung und Nullbeschleunigung (vgl. für eine ähnliche und weitere Modellierungen (Jahnke/Wippermann, 1994) und (Kirsch, 1995)). Startet man am Anfang der langen Geraden, so gibt man zunächst Vollgas, bremst dann "rechtzeitig" ab, sodass zu Beginn der Kurve die maximale Kurvengeschwindigkeit erreicht ist. Dieser erste Teil der Bewegungsfunktion wird erst einmal modelliert und untersucht, bevor die gesamte Funktion aufgestellt wird. Das Modell führt zu einer stückweise definierten Funktion mit Zick-Zack-Gestalt. Maple bietet bereits die Möglichkeit, stückweise definierte Funktionen zu spezifizieren, sodass kein gesondertes Objekt in der Mikrowelt anzubieten ist.

```
> v:=t->piecewise(t<=1,amax*t, t<=1.5, amin*(t-1) + amax, t<=5, amin*0.5+amax);
> plot(v(t),t=0..5);
```



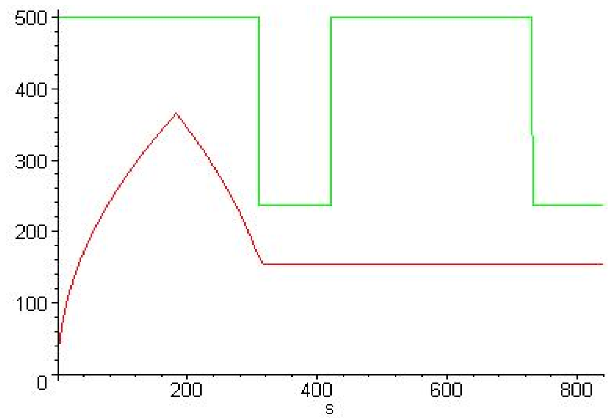
Stückweise definierte Funktionen bieten interessante Lerngelegenheiten (vgl. dazu auch (Koth,1996), (Weigand/Weller 2001)). So kommt automatisch die Frage der Stetigkeit auf. Offenbar kann die Geschwindigkeitsfunktion nicht "springen", weshalb die Geradenstücke so aneinander zu setzen sind, dass keine Unstetigkeit auftritt. Bei der Nutzung mit den SIA-Schülern kam es meistens bei den ersten Versuchen zu Unstetigkeitsstellen, sodass die Schüler überlegen mussten, durch welche Koeffizienten in der Geradenfunktion das "Aneinanderpassen" sichergestellt werden kann. Ziel ist hier die Reaktivierung und Intensivierung des früheren Wissens über Geradenfunktionen. Es zeigt sich auch in der Arbeit mit Studenten immer wieder, dass eigentlich vorhandenes Wissen in einer realen Situation in seiner Relevanz nicht erkannt und verwendet wird und somit lediglich "träges Wissen" (Mandl) darstellt.

Ist die Aufstellung einer stetigen Zick-Zack-Funktion für v(t) gelungen, so stellt sich unmittelbar die Frage, ob denn dabei die Geschwindigkeitsrestriktionen eingehalten werden. Die Schüler erkannten, dass ein schneller Vergleich mit dem Restriktionsplot nicht möglich ist, da dort die Geschwindigkeit über dem Weg und nicht über der Zeit dargestellt wird. Bei einer einfachen Funktion wie v(t)=amax*t (und s(t)=1/2*amax*t²) kann man noch eine Umrechnung von v(t) in v(s) vornehmen und dies sollten die Schüler auch tun. Bei stückweise zusammengesetzten Funktionen wird dies allerdings sehr mühsam, sodass in der Mikrowelt eine Transformationsoperation angeboten wird: vvont_nach_vvons(v). Hat man dann die konstruierte Geschwindigkeitsfunktion in Abhängigkeit vom Weg, so kann man in einem gemeinsamen Plot die Einhaltung der Restriktionen überprüfen:

```
> vvons:= vvont_nach_vvons(v);
```

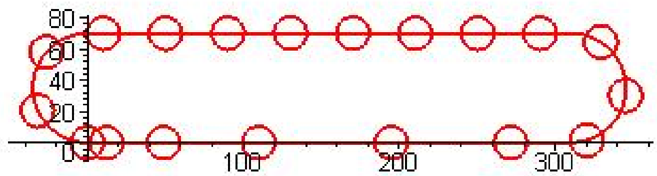
$$vvons := s \to \mathrm{piecewise}(s \le 182.5750000,\ .1000000000\sqrt{73030}\sqrt{s},\ s \le 312.5625000,\ .05000000000\sqrt{114781251 - 336560\,s},\ s < 854.3625000,\ 154.8000000,\ s = 854.3625000,\ \mathit{undefined})$$

```
> plot({vvons(s), restriktion},s=0..kurslaenge);
```



Hatten die Schüler die Zeitpunkte für Beginn und Ende des Bremsvorgangs zunächst bei der Aufstellung von v(t) sehr grob geschätzt (es waren vorher einige Runden auf dem Carrera-Kurs gefahren worden), so mussten sie jetzt die Zeitpunkte verschieben, um eine Restriktionsverletzung zu vermeiden oder noch nicht genutztes Potential auszuschöpfen. Das Verschieben der Zeitpunkte ist äußerst mühsam und fehleranfällig, wenn die Zeitpunkte als Zahlen in der Definition der piecewise-Funktion auftauchen oder gar implizit in anderen Zahlen verborgen sind. Dies führte einige Schüler dazu, eigene Variablen (Symbole) für diese Zeiten einzuführen, die in gesonderten Maple-Zeilen besetzt und dann in der Definition der piecewise-Funktion als Symbole genutzt werden. So ergab sich eine sehr einfache Experimentierumgebung, mit der durch einiges Probieren "fast optimale" Zeitpunkte bestimmt werden können. Die meisten Schüler waren damit zufrieden, ein paar haben aber auch eine exaktes Gleichungsmodell zur Bestimmung der Zeitpunkte aufgestellt. Nachdem die Bewegungsfunktion für die erste Kurshälfte festgelegt war, konnte für die zweite Hälfte in ähnlicher Weise (allerdings mit einer Startgeschwindigkeit >0) vorgegangen werden.

Als weitere Möglichkeit, die Fahrfunktion zu veranschaulichen und die Einhaltung der Restriktionen zu überprüfen, wird in der Mikrowelt eine Animation angeboten, bei der ein Kreis den Kurs abfährt. Auch eine Spur (Kreispositionen bei gleichen Zeitabständen) kann man sich anzeigen lassen. Wenn eine Geschwindigkeits-beschränkung verletzt wird, springt der Kreis aus der Bahn. Beim Einsatz in SIA hat sich dieses Angebot als nützlich erwiesen. Schüler, die durch Experimentieren zu einer fast optimalen Fahrfunktionen gekommen waren, stellten verwundert fest, dass der Kreis aus der Bahn sprang, obwohl beim gemeinsamen Plot von Geschwindigkeits- und Restriktionsfunktion keine Verletzung zu erkennen war. Letzteres lag aber nur an der begrenzten Bildschirmauflösung, sodass auch dieses Problem in die Diskussion einbezogen werden konnte.



Als letztendliches Qualitätskriterium für eine Fahrfunktion gilt wie beim sogenannten "Qualifying" in der Formel 1 die Rundenzeit. Zu deren Ermittlung wird ebenfalls eine Operation angeboten, die als Input die Kursdaten und die Weg-Zeit-Funktion s(t) benötigt. Letztere kann aus v(t) durch Integration oder mit einer weiteren Mikroweltoperation erzeugt werden.

Neben den oben beschriebenen Operationen enthält die Mikrowelt noch einige weitere Transformationsoperationen für den Fall, dass die Schüler nicht mit v(t) starten.

Zum Abschluss der Lerneinheit versuchen dann die Schüler, die modellierte Fahrfunktion auf den Carrera-Kurs auch abzufahren und die theoretisch ermittelte Rundenzeit zu erreichen. Obwohl das Modell sehr grob ist, stimmt es doch bezüglich der Rundenzeiten erstaunlich gut mit den realen Fahrversuchen überein. Die theoretisch ermittelte Rundenzeit für den einfachen Rundkurs lag bei ca. 3 Sekunden, während die besten "Fahrer" Zeiten um 3,3 Sekunden erreichten. Im Prinzip zeigt sich hier auch ein typisches ingenieurmäßiges Vorgehen, bei dem man mit sehr einfachen Modellen beginnt und nur bei Bedarf zu komplexerer Modellierung übergeht.

4. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Artikel beschreiben wir eine Mikrowelt auf CAS-Basis, in der Lernende Rennkurse und zugehörige Fahrfunktionen modellieren und mit diesen experimentieren können. Ziel ist es, zum einen die zugrundeliegenden mathematischen Konzepte aus den Bereichen Geometrie und Funktionen besser zu verstehen und anwenden zu können (für weitere Bezüge zur Didaktik der Funktionen vgl. die Ausführungen in (Gerny/Alpers, 2004)). Zum anderen sollen die Schüler Einblick in die typische Ingenieuraufgabe des Bewegungsdesigns erhalten.

Die Mikrowelt wurde bisher drei Mal (2001, 2003, 2004) in der SIA Heidenheim eingesetzt, wobei jeweils 10 bis 15 Schüler beteiligt waren. Die Schüler haben zum großen Teil mit hoher Konzentration und Interesse an den Problemstellungen gearbeitet und die Experimentiermöglichkeiten der Mikrowelt genutzt. Dabei sind die meisten Schüler immer reflektierter vorgegangen und über das Stadium des bloßen Herumprobierens deutlich hinausgekommen. Man muss dabei natürlich berücksichtigen, dass es sich bei den Schülern um einen "ausgewählten" Kreis handelt. Die Mikrowelt ist zu einem festen Bestandteil der SIA Heidenheim geworden. Ein Einsatz auch in (ca. 10) anderen SIAs in Baden Württemberg wäre auf Basis von Maplenet relativ einfach möglich, mit dem man Maple-basierte Programme in Form von Java-Applets lokal im Browser nutzen kann, während die Berechnungen auf einem entfernten Maple-Server stattfinden.

Neben der beschriebenen Fahrmodellierung über eine "Zick-Zack-Funktion" für v(t) (Vollgas, Vollbremsung, Nullbeschleunigung) sind natürlich auch andere Zugänge z.B. über v(s) oder a(t) und komplexere Modellierungen (z.B. mit stetigen Beschleunigungsfunktionen) denkbar, die realistischere Annahmen zugrunde legen. Anregungen hierfür erhält man in (Kirsch, 1995) und (Schwarze, 2002). Der Verfasser hat solche Modellierungen in mathematischen Anwendungsprojekten von Maschinenbaustudenten untersuchen lassen.

Eine Erweiterung, die neue didaktische Möglichkeiten und Lernszenarien eröffnet, besteht in der Anbindung der Mikrowelt an eine Carrera-Bahn, die es ermöglicht, konstruierte Fahrfunktionen herunterzuladen und abzufahren und - andersherum - Daten von realen Fahrten in Maple einzulesen. Dabei ergeben sich dann beispielsweise Fragen nach der Güte des vereinfachten Modells (Vollgas, Vollbremsung, Nullbeschleunigung), das Sprünge in der Beschleunigungsfunktion enthält. Eine durch einen Mikroprozessor gesteuerte Bahn existiert bereits, mit der man Spannungs-Zeit-Funktionen u(t) abfahren kann. Die Umsetzung von v(t) auf u(t) sowie die Bewegungsaufnahme über Funksensoren sind Gegenstand laufender Arbeiten.

Literatur

Alpers, B. (2002a): CAS as Environments for Implementing Mathematical Microworlds, Int. Journal of Computer Algebra in Mathematics Education 9 (2002), 177-204.

Alpers, B. (2002b): Mathematical Application Projects for Mechanical Engineers - Concept, Guidelines and Examples, Technology in Mathematics Teaching, Proc. of ICTMT 5 in Klagenfurt 2001, M. Borovcnik, H. Kautschitsch (eds.), öbv&hpt, Wien 2002, 393-396.
Langversion in: http://www.fbm.fh-aalen.de/profumit/alpers/homepage/alpers.htm#Veroeffentlichungen

Edwards, L. (1998): Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representations, Journal of Mathematical Behavior 17 (1998), 53-78.

Gerny, M., Alpers, B. (2004): Formula 1 - A Mathematical Microworld with CAS: Analysis of Learning Opportunities and Experiences with Students (Int. Journal of Computers for Mathematical Learning, to appear).

Jahnke, Th., Wippermann, Ch. (1994): Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung im Mathematikunterricht, Mathematik in der Schule 32 (1994), 83-91.

Kirsch, A. (1995): Anfahren und Bremsen mit dem Auto, Praxis der Mathematik 37 (1995), 151-158.

Koth, M. (1996): Abschnittweise definierte Funktionen, mathematik lehren 75 (1996), 61-63.

Schwarze, H. (2002): Fahrphysik und Verkehr, Themenheft der Praxis der Naturwissenschaften vereinigt mit Physik in der Schule, 51 (2002).

Weigand, H.-G., Weller,H. (2001): Changes of Working Styles in a Computer Algebra Environment - The Case of Functions, Int. Journal of Computers for Mathematical Learning 6, 87-111.